Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 121. *Extrema mit Vorzeichenverteilung*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \cos\left(\pi\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right)$.

(a) Skizzieren Sie die Menge $\mathcal{N}_0 = \left\{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f((x,y)^\intercal) = 0\right\}$ sowie die Vorzeichenverteilung von f.

(b) Bestimmen Sie $\nabla f\left((x,y)^\intercal\right)$ sowie kritischen Stellen.

(c) Ergänzen Sie Ihre Skizze um die kritischen Stellen und entscheiden Sie mit (a), ob an diesen lokale Minima oder Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Aus $\frac{\pi}{1+x^2+y^2} \in (0,\pi]$ folgt $\pi\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right) \in [\pi, -\pi)$. Die beiden Nullstellen des Cosinus in diesem Bereich sind $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. Sei also

$$\pi\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right) = \frac{\pi}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\pi}{1+x^2+y^2} = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$
$$\Downarrow$$
$$1+x^2+y^2 = 3$$

sowie

$$\pi\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\pi}{1+x^2+y^2} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$
$$\Downarrow$$
$$1+x^2+y^2 = \frac{3}{2}$$

Hieraus folgt

$$\mathcal{N}_0 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2+y^2 = 2 \vee x^2+y^2 = \frac{1}{2}\right\}$$

Dies sind Kreise mit Radien $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sqrt{2}$, es genügt für die Vorzeichenverteilung aufgrund der Stetigkeit daher, einen Punkt außerhalb des größeren, einen innerhalb des kleineren sowie einen zwischen den Kreisen einzusetzen:

$$f\left((0,0)^\intercal\right) = \cos(\pi\cos(\pi)) = -1$$
$$f\left((1,0)^\intercal\right) = \cos(\pi\cos(\frac{\pi}{2})) = \cos(0) = 1$$
$$f\left((2,2)^\intercal\right) = \cos\left(\pi\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) < 0$$

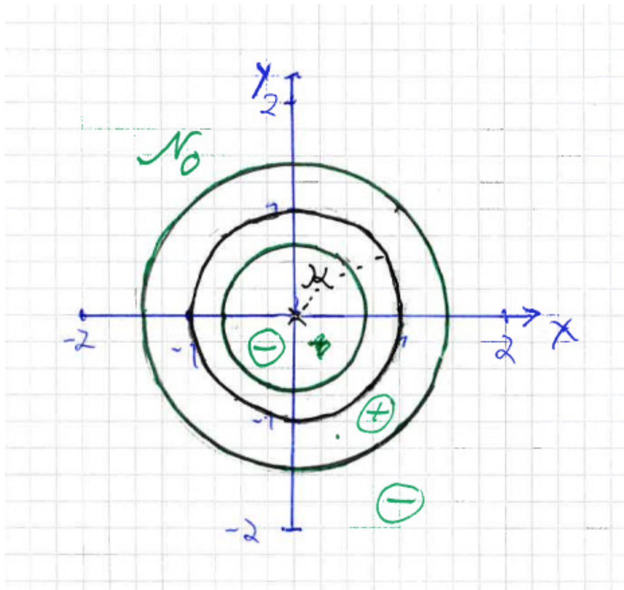

Abbildung 5: Nullstellenmenge, kritische Stellen und Vorzeichen

wobei letzteres aus $0 < \frac{\pi}{9} < \frac{\pi}{3}$ und somit $\frac{\pi}{2} < \pi \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \leqq \pi$ folgt.
Mit $\binom{1/2}{1/2}, \binom{1}{1} \in \mathcal{N}_0$ erhalten wir die Skizze in 5.

(b) Es ist

$$\nabla f\left(\binom{x}{y}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2\pi^2 x \sin\left(\pi\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)}{(1+x^2+y^2)^2} \\ -\frac{2\pi^2 y \sin\left(\pi\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Da der Cosinus genau an den Stellen die Werte $+1, -1$ annimmt, an denen der Sinus 0 wird, und somit $\sin(\pi\cos(\cdot))$ an diesen Stellen verschwindet, genügt es jeweils nur die ersten beiden Faktoren zu betrachten. Sei zunächst $x \neq 0$. Aus

$$\sin\left(\pi\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right) = 0$$

und $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ folgt somit (die Nullstellenmenge des Sinus ist $\pi\mathbb{Z}$):

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right| = 1$$

oder

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right| = 0$$

Wegen $0 < \frac{\pi}{1+x^2+y^2} \leqq \pi$ führt ersteres auf:

$$\frac{\pi}{1+x^2+y^2} = \pi \Rightarrow x = y = 0,$$

zweiteres auf

$$\frac{\pi}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x^2+y^2 = 1.$$

Sei nun $x=0$. Dann ist entweder $y=0$ oder erneut der Faktor $\sin\left(\pi\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right)$. Wir erhalten als Menge $\mathcal{K}$ der kritischen Stellen:

$$\mathcal{K} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2=1\right\}$$

Aus Abbildung 5 erkennen wir, dass in $(0,0)^\intercal$ ein lokales Minimum und in

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2=1\right\}$$

lokale Maxima vorliegen.

Aufgabe H 122. *Extrema mit Lagrange*
Gegeben seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{8}{3}x_1^2 + x_2^2$ und
$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{6}(x_1+1)^6 - \frac{1}{5}(x_1+1)^5 + 3x_2^2$.
Wir suchen die Extrema von f auf der kompakten Menge $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = 0\}$.

(a) Stellen Sie das Lagrange-System auf.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen inklusive ihrer Lagrange-Multiplikatoren.

(c) Bestimmen Sie das absolute Maximum von f auf D.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das Lagrange-System lautet mit

$$\partial_{x_1} g(x) = (x_1+1)^5 - (x_1+1)^4 = (x_1+1)^4((x_1+1)-1)$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(I)} & \frac{16}{3}x_1 + \lambda(x_1+1)^4 x_1 & = & 0 \\
\text{(II)} & 2x_2 + 6\lambda x_2 & = & 0 \\
\text{(III)} & \frac{1}{6}(x_1+1)^6 - \frac{1}{5}(x_1+1)^5 + 3x_2^2 & = & 0
\end{array}$$

(b) Wir lösen das System aus (a). Aus (II) erhalten wir $x_2 = 0$ oder $\lambda = -\frac{1}{3}$.

- $x_2 = 0$: In diesem Falle ergibt sich aus (III) die Gleichung

$$(x_1+1)^6 = \frac{6}{5}(x_1+1)^5$$

mit den Lösungen $x_1 = -1$ und $x_1 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$. Einsetzen in (I) liefert für
  - $x_1 = -1$: $-\frac{16}{3} = 0$, folglich liegt in $(-1,0)^\intercal$ keine kritische Stelle:

– $x_1 = \frac{1}{5}$:

$$\frac{16}{3} \cdot \frac{1}{5} + \lambda \left(\frac{6}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{5} = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = -\frac{2^4}{3} \cdot \frac{5^4}{2^4 \cdot 3^4} = -\frac{5^4}{3^5} = -\frac{625}{243}$$

- $\lambda = -\frac{1}{3}$: Aus (I) wird

$$16x_1 = (x_1 + 1)^4 x_1$$

und somit $x_1 = 0$ oder $|x_1 + 1 = 2|$, also $x_1 = 1$. Einsetzen in (III) ergibt

– $x_1 = 0$:

$$3x_2^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

und somit $x_2 = -\frac{1}{3\sqrt{10}}$ und $x_2 = \frac{1}{3\sqrt{10}}$

– $|x_1 + 1| = 1$: Hier gilt $x_1 + 1 = 2$ oder $x_1 + 1 = -2$, wir erhalten die Ungleichung

$$0 = \frac{(x_1 + 1)^6}{6} - \frac{(x_1 + 1)^5}{5} + 3x_2^2 \geqq \frac{2^5}{3} - \frac{2^5}{5} + 3x_2^2 > 0$$

wegen $x_2^2 \geqq 0$ und $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$. In diesem Falle existiert also keine Lösung des Lagrange-Systems.

Wir erhalten die kritischen Stellen:

$$S_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{10}} \end{pmatrix} \quad , \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

mit zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren

$$\lambda_1 = -\frac{625}{243} \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{3}$$

(c) Da D kompakt und f stetig ist, erhalten wir das Maximum folglich durch Einsetzen der Kandidaten und Vergleich der Werte. Als Extremalstellen hierbei nur kritische Stellen, welche wir in (b) bestimmt haben, oder Stellen, an denen ∇g verschwindet, infrage.

$$f(S_1) = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{5^2} + 0^2 = \frac{8}{75}$$
$$f(S_2) = \frac{8}{3} \cdot 0^2 + \left(\frac{1}{3\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{1}{90}$$
$$f(S_3) = \frac{1}{90}$$

Ferner müssen wir noch Stellen mit $\nabla g(x) = 0$ überprüfen. Aus $\partial_{x_2} g(x) = x_2 \overset{!}{=} 0$ folgt sofort $x_2 = 0$ und somit analog zu (b) $x_1 = -1$ bzw. $x_1 = \frac{1}{5}$. Letzterer Wert führt (erneut) auf S_1, ersterer ergibt die Stelle

$$S_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

an der der Gradient ebenfalls verschwindet $\big(\partial_{x_1} g(S_4) = (-1+1)^4(-1) = 0\big)$, allerdings hat das Lagrange-System dort keine Lösung. Mit

$$f(S_4) = \frac{8}{3} > 1 > \max\left(\frac{8}{75}, \frac{1}{90}\right)$$

erhalten wir schließlich

$$\max_{x \in D} f(x) = \frac{8}{3}.$$

das absolute Maximum ist $\left(-1, 0, \frac{8}{3}\right)^{\mathsf{T}}$.

Aufgabe H 123. *Extrema auf abgeschlossenen Kugeln*
Durch eine symmetrische, positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird mittels $\langle x \,|\, y\rangle_A = x^{\mathsf{T}} A y$ ein Skalarprodukt sowie mittels $\|x\|_A = \sqrt{\langle x \,|\, x\rangle_A}$ eine („Energie"-)Norm induziert. Sei nun $n = 3$ und A die positiv definite Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungen des Gleichungssystems nach Lagrange für das Problem:

$$\max_{x\in D} \frac{1}{2}\|x\|_A^2 \quad \text{mit} \qquad D = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |x|^2 = 25\right\}$$

(b) Bestimmen Sie $\tilde{x} \in \tilde{D} := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |x|^2 \leqq 25\right\}$ mit $\|\tilde{x}\|_A \geqq \|x'\|_A$ für alle $x' \in \tilde{D}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit

$$\frac{1}{2}\|x\|_A^2 = \frac{3}{2}x_1^2 + x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 4x_3^2$$

ergibt sich das Lagrange-System

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(I)} & 3x_1 + x_2 + 2\lambda x_1 & = & 0 \\
\text{(II)} & x_1 + 3x_2 + 2\lambda x_2 & = & 0 \\
\text{(III)} & 8x_3 + 2\lambda x_3 & = & 0 \\
\text{(IV)} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & = & 25
\end{array}$$

Aus (III) folgt sofort folgende Fallunterscheidung:

$\lambda = -4$: Wir erhalten aus (I) und (II)

$$\begin{aligned} -13x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - 13x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Da $\begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 1 & -13 \end{pmatrix}$ invertierbar ist – die Determinante ist 168 – folgen $x_1 = x_2 = 0$ und somit $x_3^2 = 25$ und somit die Kritischen Stellen

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0$: Aus (I) und (II) erhalten wir

$$\begin{aligned}(3+2\lambda)\,x_1 + x_2 &= 0\\ x_1 + (3+2\lambda)\,x_2 &= 0\end{aligned}$$

In diesem Falle gilt $x_1^2 + x_2^2 > 0$, was bedeutet, wir suchen nach nicht-trivialen Lösungen des LGS

$$\begin{pmatrix}(3+2\lambda) & 1\\ 1 & (3+2\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Folglich muss

$$0 = (3+2\lambda)^2 - 1 = 4\lambda^2 + 12\lambda + 8$$

gelten und somit $\lambda = -1$ oder $\lambda = -2$, wie sich durch Lösungsformel oder geschicktes Raten (sprich: Einsetzen der ganzzahligen Teiler von 8) ergibt. Wir erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\lambda = -1: &\qquad x_1 + x_2 = 0\\ \lambda = -2: &\qquad x_1 - x_2 = 0\end{aligned}$$

insbesondere also $x_2^2 = x_1^2$, was auf

$$x_1^2 = \frac{25}{2}$$

führt und somit die kritischen Stellen

$$\begin{aligned}\lambda = -1: &\qquad K_3 = \begin{pmatrix}-\frac{5}{\sqrt{2}}\\ \frac{5}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},\ K_4 = \begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{2}}\\ -\frac{5}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}\\ \lambda = -2: &\qquad K_5 = \begin{pmatrix}-\frac{5}{\sqrt{2}}\\ -\frac{5}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},\ K_6 = \begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{2}}\\ \frac{5}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(b) Die Menge $\tilde{D}$ ist als abgeschlossene Kugel kompakt, somit wird das Maximum im Inneren oder auf dem Rand angenommen. Ferner gilt $\|\tilde{x}\|_A \geqq \|x'\|_A \forall x' \in \tilde{D}$ genau dann, wenn $\frac{1}{2}\|\tilde{x}\|_A^2 \geqq \frac{1}{2}\|x'\|_A^2 \forall x' \in \tilde{D}$ gilt. Die Kandidaten auf dem Rand sind genau die in der vorherigen Aufgabe bestimmten Stellen, da $\nabla g(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\tilde{D} = D$ gilt. Wir setzen diese in $f(x) := \frac{1}{2}\|x\|_A^2 = \frac{3}{2}x_1^2 + x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 4x_3^2$ ein:

$$\begin{aligned}f(K_1) &= 100 = f(K_2)\\ f(K_3) &= \frac{3}{4}\cdot 25 + \frac{1}{4}\cdot 25 + \frac{3}{4}\cdot 25\\ &= \frac{225}{4} = f(K_4)\\ f(K_5) &= \frac{3}{4}\cdot 25 - \frac{1}{4}\cdot 25 + \frac{3}{4}\cdot 25\\ &= \frac{125}{4} = f(K_6)\end{aligned}$$

Wegen $125 < 400, 225 < 400$ folgt, dass der Maximalwert auf dem Rand in K_1 und K_2 angenommen wird. Wir müssen nur noch das Innere überprüfen. Da dieses offen ist, sind die Kandidaten im Inneren genau die kritische Stellen des unrestringierten Problems $\max_{x\in\mathbb{R}^3} f(x)$, die im Inneren liegen. Da aber $\nabla f(x) = Ax$ gilt (vgl. Lagrange-System), ist der einzige Kandidat $x = 0$: A ist positiv definit! Für diesen gilt $f(x) = 0 < 100$.
Wir erhalten $\tilde{x} = K_1$ (oder $\tilde{x} = K_2$).

Aufgabe H 124. *Extrema mit Parametrisierungen*

Seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \frac{1}{4}x^2y - \frac{2}{3}x^2$ und $D = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3\}$.

(a) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von $\min_{(x,y)^\intercal \in D} f\left(\binom{x}{y}\right)$ mit der Lagrange-Methode.

(b) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mittels einer geeigneten Parametrisierung.

(c) Entscheiden Sie jeweils, ob in diesen ein lokales oder globales Minimum oder Maximum oder nichts dergleichen vorliegt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das Lagrange-System lautet mit $g((x,y)^\intercal) = x^2 - y^3$:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & \frac{1}{2}xy - \frac{4}{3}x + 2\lambda x & = & 0 \\ \text{(II)} & \frac{1}{4}x^2 - 3\lambda y^2 & = & 0 \\ \text{(III)} & x^2 - y^3 & = & 0 \end{array}$$

Aus (II) und (III) erhalten wir:

$$\frac{1}{4}y^3 = 3\lambda y^2$$

und somit $y = 0$ oder $y = 12\lambda$. Im erstem Falle folgt aus (III) sofort $x = 0$, für welches (I) ebenfalls gilt, λ ist in diesem Falle beliebig wählbar.
Für zweiteres erhalten wir mit (I)

$$0 = 6\lambda x - \frac{4}{3}x + 2\lambda x = 8\lambda x - \frac{4}{3}x$$

also ist entweder $x = 0$ (und somit y ebenfalls) oder es gilt $\lambda = \frac{1}{6}$. Hieraus folgt sofort $y = 2$ und somit $x = -2\sqrt{2}$ bzw. $x = 2\sqrt{2}$. Die kritischen Stellen lauten:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) Wir können D mittels $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \sqrt[3]{t^2} \end{pmatrix}$ parametrisieren und erhalten

$$(f \circ \alpha)(t) = \frac{1}{4}t^2\sqrt[3]{t^2} - \frac{2}{3}t^2 = \frac{1}{4}\left(t^8\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}t^2$$

Ableiten ergibt

$$
\begin{aligned}
(f\circ\alpha)'(t) &= \frac{2}{3}\left(t^8\right)^{-\frac{2}{3}} t^7 - \frac{4}{3}t \\
&= \frac{2}{3}t^{-4}\left(t^2\right)^{-\frac{2}{3}} t^7 - \frac{4}{3}t = \frac{2}{3}\underbrace{\underbrace{t^3}_{=t\cdot t^2}}_{=t\cdot\left(t^6\right)^{\frac{1}{3}}}\left(t^2\right)^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}t \\
&= \frac{2}{3}t\left(\frac{t^6}{t^{-4}}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}t = \frac{2}{3}t\left(t^2\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}t = \frac{2}{3}t\sqrt[3]{t^2} - \frac{4}{3}t
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt wiederum $t=0$ oder $\frac{2}{3}\sqrt[3]{t^2} = \frac{4}{3}$ und somit

$$t^2 = 2^3 = 8 \Rightarrow t = \pm 2\sqrt{2}$$

Einsetzen ergibt die Stellen

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$$

welche wir in (a) (offenbar korrekt) berechnet haben.
Bemerkung: Man beachte, dass die obige Rechnung (Ableiten) formal erstmal nur für $t\neq 0$ gilt, für $t=0$ ergibt sich die Ableitung durch stetige Fortsetzung, vgl. Satz 2.5.11. Ferner wurde bei den Umformungen und Klammerungen stets darauf geachtet, dass die aus- oder „ein“geklammerten Terme stets von der Form $(t^2)^{\cdots}$ waren. Dies ist wichtig für die Gültigkeit/Anwendbarkeit der Potenzgesetze: Es gilt stets $t^2>0$ für $t\neq 0$. Ferner

(c) Die Art können wir mit Hilfe der Parametrisierung recht einfach bestimmen: Einsetzen der Werte $t\in\left\{-2\sqrt{2},0,2\sqrt{2}\right\}$ ergibt mit $t^8=(t^2)^4$ und $t^2\in\{0,2^3\}$:

$$
\begin{aligned}
f(K_2) = (f\circ\alpha)\left(-2\sqrt{2}\right) &= \frac{1}{4}\left(2^{3\cdot 4\cdot\frac{1}{3}}\right) - \frac{2}{3}2^3 = -\frac{4}{3} \\
f(K_1) = (f\circ\alpha)\left(2\sqrt{2}\right) &= 0 \\
f(K_3) = (f\circ\alpha)\left(2\sqrt{2}\right) &= \frac{1}{4}\left(2^{3\cdot 4\cdot\frac{1}{3}}\right) - \frac{2}{3}2^3 = -\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Da $f\circ\alpha$ auf dem Intervall $\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$ ein globales Minimum und globales Maximum auf dem Rand oder an einer kritischen Stelle im annimmt, folgt, dass in K_1 ein lokales Maximum von f vorliegt. Wegen

$$(f\circ\alpha)(t) = \frac{1}{4}\left(t^8\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}t^2 = t^2\left(\frac{1}{4}\sqrt[3]{t^2} - \frac{2}{3}\right) \overset{|t|\to\infty}{\to} \infty$$

ist dieses jedoch nicht global.
Wir können ferner wegen der Stetigkeit von f, der Symmetrie und dem Grenzwertverhalten ein $\tilde{t} > 2\sqrt{2}$ so wählen, dass $f(\alpha(t)) \geqq 0$ für alle $t\in\mathbb{R}\setminus[-\tilde{t},\tilde{t}]$ gilt sowie $f(\tilde{t})=0$. Auf dem Intervall $[-\tilde{t},\tilde{t}]$ nimmt $f\circ\alpha$ ein globales Minimum und ein globales Maximum an. Es gilt

$$f(\alpha(-\tilde{t})) = f(\alpha(\tilde{t})) = 0 > f(\alpha(2\sqrt{2})) = f(\alpha(-2\sqrt{2}))$$

Entsprechend liegen die absoluten Minima auf dem Intervall in den Stellen $2\sqrt{2}$ und $-2\sqrt{2}$: Die kritischen Stellen im Inneren entsprechen den bereits bestimmten. Aus der Wahl von $\tilde{t}$ folgt weiter, dass

$$f(\alpha(2\sqrt{2})) = f(\alpha(-2\sqrt{2})) \leqq f(\alpha(t))$$

für **alle** $t \in \mathbb{R}$ gilt, somit liegen in K_2 und K_3 globale Minima vor.

Frischhaltebox

Aufgabe H 125. *Hesse-Normalform*
Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der folgenden Ebene:

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen

$$\eta^* = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und erhalten mit $25 + 49 + 9 = 83$ den Normalenvektor

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{83}} \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

aus

$$\left\langle \eta \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle = -\frac{10}{\sqrt{83}}$$

erhalten durch Umklappen des Vorzeichens wir die Darstellung

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \frac{1}{\sqrt{83}} \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle = \frac{10}{\sqrt{83}} \right\}$$