Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 126. *Differentiationsregeln*

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der durch folgende Zuordnungsvorschriften gegebenen Funktionen direkt und unter Verwendung der Kettenregel 4.8.3. Untersuchen Sie den maximalen Definitionsbereich aller dabei auftretenden Funktionen sowie der Verkettung selbst.

(a) $\binom{x}{y} \mapsto f_1\left(f_2\left(\binom{x}{y}\right)\right)$ mit $f_1(t) = \arcsin(t)$ und $f_2\left(\binom{x}{y}\right) = \exp(-x^2 - y^2)$.

(b) $\binom{u}{v} \mapsto g_1\left(g_2\left(\binom{u}{v}\right)\right)$ mit $g_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 z - y \\ xy + \sqrt{z} \\ x - y - zxy \end{pmatrix}$ und $g_2\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u - v \\ u + v + 1 \\ uv \end{pmatrix}$.

Hinweis: Die Diskussion muss nicht für die Jacobi-Matrix erfolgen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Der maximale Definitionsbereich von f_1 ist (vgl. Beispiel 2.3.2) $[-1, 1]$.
f_2 hingegen ist auf komplett $\mathbb{R}^2$ wohldefiniert (weder Exponential- noch Polynomfunktionen haben Definitionslücken).
Da der Wertebereich wegen $-x^2 - y^2 \leqq 0$ mit Gleichheit für $x = y = 0$ sowie $\exp(r) \overset{r \to -\infty}{\to} 0$ in $(0, 1]$ enthalten ist, folgt, dass der maximale Definitionsbereich der Verkettung gegeben ist durch $\mathbb{R}^2$.
Direkte Methode: Es gilt

$$(f_1 \circ f_2)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \arcsin\left(\exp(-x^2 - y^2)\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(f_1 \circ f_2)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\exp(-2x^2-2y^2)}} \cdot \exp(-x^2 - y^2) \cdot (-2x) \\ \frac{1}{\sqrt{1-\exp(-2x^2-2y^2)}} \cdot \exp(-x^2 - y^2) \cdot (-2y) \end{pmatrix}^{\intercal} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2x \exp\left(-x^2-y^2\right)}{\sqrt{1-\exp(-2x^2-2y^2)}} & -\frac{2y \exp\left(-x^2-y^2\right)}{\sqrt{1-\exp(-2x^2-2y^2)}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kettenregel: Wir erhalten mit

$$\begin{aligned} \mathrm{J}f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} \\ \mathrm{J}f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} -2x \exp\left(-x^2 - y^2\right) & -2y \exp\left(-x^2 - y^2\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entsprechend

$$\mathrm{J}(f_1 \circ f_2)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2x \exp\left(-x^2-y^2\right)}{\sqrt{1-\exp(-2x^2-2y^2)}} & -\frac{2y \exp\left(-x^2-y^2\right)}{\sqrt{1-\exp(-2x^2-2y^2)}} \end{pmatrix}$$

(b) Der maximale Definitionsbereich von g_1 ist – da die Komponenten mit Ausnahmen des Terms $\sqrt{z}$ Polynomfunktionen sind – gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \geqq 0 \right\}$$

Der maximale Definitionsbereich von g_2 ist hingegen gesamt $\mathbb{R}^2$.
Für die Verkettung muss $uv \geqq 0$ gelten, der maximale Definitionsbereich ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; uv \geqq 0 \right\}$$

Direkte Methode: Es gilt

$$\begin{aligned}
(g_1 \circ g_2)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} (u-v)^2uv - (u+v+1) \\ (u-v)(u+v+1) + \sqrt{uv} \\ (u-v) - (u+v+1) - (u-v)(u+v+1)uv \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u^3v - 2u^2v^2 + uv^3 - u - v - 1 \\ u^2 - v^2 + u - v + \sqrt{uv} \\ -2v - 1 - u^3v + uv^3 - u^2v + uv^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\mathrm{J}(g_1 \circ g_2)\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 3u^2v - 4uv^2 + v^3 - 1 & u^3 - 4u^2v + 3uv^2 - 1 \\ 2u + 1 + \frac{v}{2\sqrt{uv}} & -2v - 1 + \frac{u}{2\sqrt{uv}} \\ -3u^2v + v^3 - 2uv + v^2 & -2 - u^3 + 3uv^2 - u^2 + 2uv \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Kettenregel: Wir erhalten mit

$$\mathrm{J}g_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2xz & -1 & x^2 \\ y & x & \frac{1}{2\sqrt{z}} \\ 1 - zy & -1 - zx & -xy \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{J}g_2\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix}$$

entsprechend

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}(g_1 \circ g_2)\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2(u-v)uv & -1 & (u-v)^2 \\ u+v+1 & u-v & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ 1 - uv(u+v+1) & -1 - uv(u-v) & -(u-v)(u+v+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2u^2v - 2uv^2 & -1 & u^2 - 2uv + v^2 \\ u+v+1 & u-v & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ 1 - u^2v - uv^2 - uv & -1 - u^2v + uv^2 & -u^2 + v^2 - u + v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3u^2v - 4uv^2 - 1 + v^3 & 3uv^2 - 4u^2v - 1 + u^3 \\ 2u + 1 + \frac{v}{2\sqrt{uv}} & -1 - 2v + \frac{u}{2\sqrt{uv}} \\ -3u^2v + v^3 - 2uv + v^2 & -2 + 3uv^3 + 2uv - u^3 - u^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe H 127. *Verhalten von Gradienten – Skizze von Kurven*
Gegeben sei die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto xy - y^2 + x$.

(a) Berechnen Sie $\nabla g\left(\binom{x}{y}\right)$.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten in den Punkten $\binom{x}{y}$ mit $g\left(\binom{x}{y}\right) = 0$ für $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

(c) Skizzieren Sie die Tangenten in diesen Punkten.

(d) Skizzieren Sie grob den Verlauf der durch $g\left(\binom{x}{y}\right) = 0$ gegebenen Kurve.

Hinweis: Arbeiten Sie mit folgenden Rundungswerten: $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, $\sqrt{5} \approx 2{,}2$, $\sqrt{21} \approx 4{,}6$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\nabla g\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}y+1\\x-2y\end{pmatrix}$$

Es gilt

$$-y^2+xy+x=0$$

und somit

$$y_{1/2}(x)=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+4x}}{-2}$$

und somit

$$P_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad P_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$P_4=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1\\-0,6\end{pmatrix} \qquad P_5=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1\\1,6\end{pmatrix}$$

$$P_6=\begin{pmatrix}2\\1-\sqrt{3}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2\\-0,7\end{pmatrix} \qquad P_7=\begin{pmatrix}2\\1+\sqrt{3}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2\\2,7\end{pmatrix}$$

$$P_8=\begin{pmatrix}3\\\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}3\\-0,8\end{pmatrix} \qquad P_9=\begin{pmatrix}3\\\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}3\\3,8\end{pmatrix}$$

Wir erhalten:

$$\nabla g(P_1)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\nabla g(P_2)=\begin{pmatrix}0,5\\1,5\end{pmatrix} \qquad \nabla g(P_3)=\begin{pmatrix}2\\-1,5\end{pmatrix}$$

$$\nabla g(P_4)\approx\begin{pmatrix}0,4\\2,2\end{pmatrix} \qquad \nabla g(P_5)\approx\begin{pmatrix}2,6\\-2,2\end{pmatrix}$$

$$\nabla g(P_6)\approx\begin{pmatrix}0,3\\3,4\end{pmatrix} \qquad \nabla g(P_7)\approx\begin{pmatrix}3,7\\-3,4\end{pmatrix}$$

$$\nabla g(P_8)\approx\begin{pmatrix}0,2\\4,6\end{pmatrix} \qquad \nabla g(P_9)\approx\begin{pmatrix}4,8\\-4,6\end{pmatrix}$$

(b) Die Tangenten (Tangente bzw. T. P_j mit $j=1,2,3,...9$) sind in Abbildung 6 abwechselnd grün und schwarz gezeichnet zwecks einer besseren Unterscheidbarkeit. Der Verlauf der eigentlichen Niveaulinie – in der Skizze $\mathcal{N}_0$ ist mit gelben Marker nachgezeichnet. Die Bleistiftpfeile sind die in den Testpunkten angehefteten Gradientenvektoren bzw. skalierte Versionen davon.

Bemerkung: Die vollständige Niveaulinie besteht aus zwei Teilen, ein Teil liegt im dritten Quadranten außerhalb des sichtbaren Bereichs. Letzterer wurde hier so gewählt, dass die in den vorherigen Aufgaben verlangten Punkte und Tangenten im sichtbaren Bereich lagen. Falls man Ihn größer wählt, müsste man obigen Prozess für die Punkte im dritten Quadranten wiederholen.

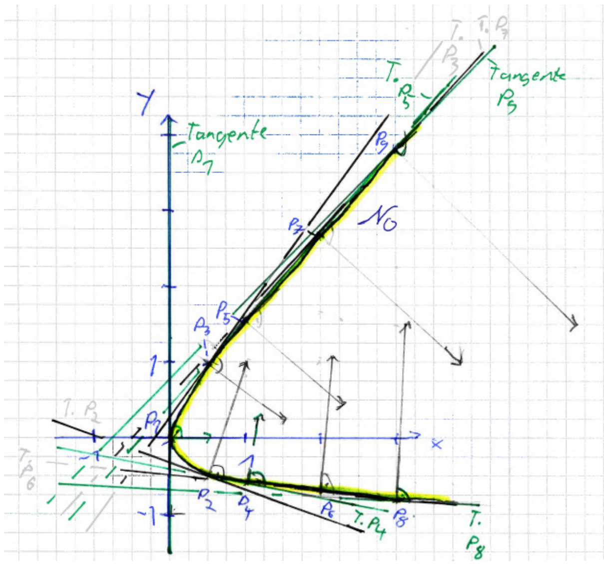

Abbildung 6: Skizze zu H127

Aufgabe H 128. *Rotation und Divergenz*

Geben sei das parameterabhängige Vektorfeld

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} \exp(\sin(x_3)) + 9x_2 \\ \alpha^2 x_1 + \cos(x_3) \\ -x_2\sin(x_3) + x_1\cos(x_3)\exp(\sin(x_3)) \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{rot} f_\alpha$ und $\operatorname{div} f_\alpha$.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt f_α ein Potential?

(c) Berechnen Sie $\operatorname{div}\operatorname{rot} f_\alpha(x)$ für $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} f_\alpha(x) &= \begin{pmatrix} \partial_{x_2}\left(-x_2\sin(x_3) + x_1\cos(x_3)\exp(\sin(x_3))\right) - \partial_{x_3}\left(\alpha^2 x_1 + \cos(x_3)\right) \\ \partial_{x_3}\left(\exp(\sin(x_3)) + 9x_2\right) - \partial_{x_1}\left(-x_2\sin(x_3) + x_1\cos(x_3)\exp(\sin(x_3))\right) \\ \partial_{x_1}\left(\alpha^2 x_1 + \cos(x_3)\right) - \partial_{x_2}\left(\exp(\sin(x_3)) + 9x_2\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin(x_3) + \sin(x_3) \\ \cos(x_3)\exp(\sin(x_3)) - \cos(x_3)\exp(\sin(x_3)) \\ \alpha^2 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha^2 - 9 \end{pmatrix} \\
\operatorname{div} f(x) &= \partial_{x_1}\left(\exp(\sin(x_3)) + 9x_2\right) + \partial_{x_2}\left(\alpha^2 x_1 + \cos(x_3)\right) \\
&\quad + \partial_{x_3}\left(-x_2\sin(x_3) + x_1\cos(x_3)\exp(\sin(x_3))\right) \\
&= -x_2\cos(x_3) - x_1\sin(x_3)\exp(\sin(x_3)) + x_1\left(\cos(x_3)\right)^2\exp(\sin(x_3))
\end{aligned}$$

(b) Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, hat f_α genau dann ein Potential, wenn die Rotation verschwindet. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\alpha \in \{-3, 3\}$ ist, siehe (a).

(c) Da f_α beliebig oft stetig differenzierbar ist, – die Komponentenfunktion sind Kompositionen glatter Funktionen und haben keine Definitionslücken – gilt nach 5.2.8 für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} f_\alpha(x) = 0$$

insbesondere für alle $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Aufgabe H 129. *Extrema mit Jacobi-Matrix*
Geben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3\colon x \mapsto x_1^2 + x_3^2 + x_2 \qquad , \qquad g\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 9 \\ x_1^2 + x_3^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Sei $\mathcal{M} := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(x) = 0 \right\}$

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x)$ und $\mathrm{J}g\,(x)$.

(b) Weisen Sie nach, dass $\mathcal{M}$ beschränkt ist.

(c) Bestimmen Sie die globalen Extremwerte der Einschränkung $f|_{\mathcal{M}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{J}g\,(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

(b) Aus $x_1^2 + x_2^2 = 9$ folgt $x_1, x_2 \in [-3, 3]$, analog folgt aus $x_1^2 + x_3^2 = 4$ $x_1, x_2 \in [-2, 2]$. Entsprechend ist $\mathcal{M}$ Teilmenge des beschränkten Quaders $[-2, 2] \times [-3, 3] \times [-2, 2]$.

(c) Das Lagrange-System lautet:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(I)} & 2x_1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_1 & = & 0 \\
\text{(II)} & 1 + 2\lambda_1 x_2 & = & 0 \\
\text{(III)} & 2x_3 + 2\lambda_2 x_3 & = & 0 \\
\text{(IV)} & x_1^2 + x_2^2 - 4 & = & 0 \\
\text{(V)} & x_1^2 + x_3^2 - 9 & = & 0
\end{array}$$

Aufgrund der Nebenbedingungen sind x_1 und x_3 nie gleichzeitig 0, analoges gilt für x_1 und x_2. Entsprechend hat die Jacobi-Matrix

$$\mathrm{J}g\,(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_1 \\ 2x_2 & 0 \\ 0 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

höchstens dann nicht vollen Rang in $\mathcal{M}$ wenn $x_2 = x_3 = 0$ gilt. In diesem Falle folgt aber $9 = x_1^2 = 4$, ein Widerspruch.
Folglich hat die Jacobi-Matrix in $\mathcal{M}$ stets vollen Rang, sämtliche Extremstellen können mit Lagrange gefunden werden.
Aus (II) folgt unmittelbar $\lambda_1 x_2 \neq 0$. Aus (III) wiederum $x_3 = 0$ oder $\lambda_2 = -1$.

$x_3 = 0$: In diesem Falle folgt $x_1^2 = 9 > 4$, dies liefert keine kritische Stelle.

$\lambda_2 = -1$: In diesem Falle folgt aus (II) (wegen $\lambda_1 \neq 0$) sofort $x_1 = 0$. Dann ist $x_2 = \pm 2$ und $x_3 = \pm 4$ (nach (IV) und (V)). Da in diesen Fällen ferner $\lambda_1 = -\frac{1}{2x_2}$ wohldefiniert ist, liefert dies die kritischen Stellen:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad K_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Beschränktheit von $\mathcal{M}$ sowie der Stetigkeit von g ist $\mathcal{M}$ kompakt, wir erhalten die Extremwerte durch Einsetzen dieser Kandidaten:

$$f(K_1) = 9 + 2 = 11 = f(K_3)$$
$$f(K_2) = 9 - 2 = 7 = f(K_4)$$

Der globale (absolute) Maximalwert von $f|_{\mathcal{M}}$ ist 11, der globale Minimalwert 7.

Frischhaltebox

In Standardkoordinaten sei der Punkt X gegeben durch ${}_{\mathbb{E}}X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung bezüglich $\mathbb{O} := \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

Lösungshinweise hierzu: Wir bestimmen zunächst die zugehörige Transformationsmatrix $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$-5Z_2 + 4Z_1 : \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right]$$

$$1/5(Z_1 - 4Z_2) : \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right]$$

Wir erhalten somit:

$${}_{\mathbb{O}}X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 18 \\ -23 \end{pmatrix}$$