J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

M. Stroppel

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Die folgenden Aufgaben sind Zusatzaufgaben zur freiwilligen Übung und gehen **nicht** in die Bewertung mit ein, es erfolgt **keine** ILIAS-Abgabe.
Eine Bearbeitung als Vorbereitung auf die Klausur ist dennoch ratsam. Einige dieser Aufgaben stammen in dieser bzw. ähnlicher Form aus Prüfungen früherer Semester.

Aufgabe H 130. *Gravitationspotential*

Wir fixieren die Erde in $P_E := (0,0,0)^\intercal$ sowie den Mond im Punkt $P_M := (0,0,1)^\intercal$. Das zugehörige Gravitationspotential sei (vgl. einleitendes Beispiel im Skript) gegeben durch:

$$U\colon \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{P_E, P_M\} \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \frac{2m_E}{|x-P_E|} + \frac{2m_M}{|x-P_M|}$$

wobei m_E die Erdmasse und $m_M = \frac{1}{81}m_E$ die Mondmasse sei.

(a) Bestimmen Sie ∇U.

(b) Bestimmen Sie den Punkt P_G auf der Verbindungsstrecke von P_E und P_V, auf dem sich die Gravitationskräfte von Erde und Mond aufheben.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{div}(\nabla U)(P_G)$ und $\operatorname{rot} \nabla U(P_G)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Aus dem Skript wissen wir dass die Jacobi-Matrix eines im Ursprung zentrierten Gravitationspotentials $\tilde{U}$ gegeben ist durch

$$\mathrm{J}\tilde{U}\,(v) = -\frac{2}{|v|^3}v$$

Mit Hile der Kettenregel 4.8.3 folgt für die Verkettung mit Verschiebungen $\tau(v) = v-a$ (die zugehörige Jacobimatrix ist die Identität) sofort

$$\mathrm{J}(\tilde{U}\circ\tau)\,(v) = -\frac{2}{|v-a|^3}(v-a)$$

Es gilt also:

$$\nabla U(x) = -\frac{2m_E}{|x-P_E|^3}(x-P_E) - \frac{2m_M}{|x-P_M|^3}(x-P_M)$$

(b) Jeder Punkt der Verbindungsstrecke lässt sich mit Hilfe eines $\lambda \in [0,1]$ schreiben als

$$x = P_E + \lambda(P_M - P_E) = \lambda P_M + (1-\lambda)P_E$$

Somit gelten:

$$\begin{aligned}
x - P_E &= \lambda(P_M - P_E)\\
x - P_M &= (1-\lambda)(P_E - P_M)\\
|x - P_E| &= \lambda|P_M - P_E|\\
|x - P_M| &= (1-\lambda)|P_M - P_E|
\end{aligned}$$

Da ferner $\nabla U(x) = 0$ gelten soll, folgt

$$\frac{2m_M}{(1-\lambda)^3}(1-\lambda)(P_E - P_M) = -\frac{2m_E}{\lambda^3}\lambda(P_M - P_E) = \frac{2m_E}{\lambda^2}(P_E - P_M)$$

was auf die Bedingung

$$m_M\lambda^2 = m_E(1-\lambda)^2$$

führt. Wir erhalten die quadratische Gleichung:

$$0 = (m_E - m_M)\,\lambda^2 - 2\lambda m_E + m_E$$

und somit mit der allgemeinen Lösungsformel und der Tatsache, dass wir uns für $0 < \lambda < 1$ interessieren

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{2m_E + \sqrt{4m_E^2 - 4m_E(m_E - m_M)}}{2(m_E - m_M)} \\ &= \frac{2m_E - 2m_E\sqrt{\frac{m_M}{m_E}}}{2(m_E - m_M)} \\ &= \frac{1-\sqrt{\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}} = \frac{9}{10}\end{aligned}$$

wobei $\alpha = \frac{1}{81}$ das Massenverhältnis von Erde und Mond bezeichne. Dies führt auf

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

(c) Aus Lemma 5.2.8 folgt sofort, dass

$$\operatorname{rot}(\nabla U) = 0$$

gilt. Ferner folgt:

$$\operatorname{div}(\nabla U)(x) = \partial_{x_1x_1}U(x) + \partial_{x_2x_2}U(x) + \partial_{x_3x_3}U(x)$$

Wie wir aus Skript und (a) wissen, gilt für ein in a zentriertes Gravitationspotential

$$\partial_{x_j}\tilde{U}(x) = -\frac{2}{|x-a|^3}(x_j - a_j) \quad j = 1,2,3$$

Für beliebiges $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\partial_{x_j}|x-a|^n &= \partial_{x_j}\sqrt{\sum_{j=1}^{3}(x_j-a_j)^2}^{\,n} = n\sqrt{\sum_{j=1}^{3}(x_j-a_j)^2}^{\,n-1} \cdot \frac{x_j - a_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{3}(x_j-a_j)^2}} \\ &= n(x_j - a_j)|x-a|^{n-2}\end{aligned}$$

womit sich für $j = 1, 2, 3$:

$$\partial_{x_j x_j} \tilde{U}(x) = -\frac{2}{|x-a|^3} + \frac{6(x_j - a_j)^2}{|x-a|^5}$$

und somit

$$\Delta\tilde{U}(x) = \frac{6|x-a|^2}{|x-a|^5} - 3 \cdot \frac{2}{|x-a|^3} = 0$$

ergibt. Wir erhalten durch Einsetzen von P_E und P_M für a sowie Addition:

$$\Delta U(P) = 0$$

Bemerkung: Man könnte annehmen, der gefundene Punkt ist eine Ruhelage, in der man mühelos (sprich: ohne Kraftanstrengung) verharren kann – dies ist jedoch nicht der Fall. Diese Punkte – Lagrange-Punkte genannt – befinden sich an anderen Stellen. Der Grund hierfür (sowie den Umstand, dass es mehrere gibt), liegt darin, dass das betrachtete System kein Inertial-System ist: Erde und Mond rotieren um einen gemeinsamen Schwerpunkt, entsprechend müssen in der Realität Trägheitskräfte berücksichtigt werden.

Aufgabe H 131. *Kurvenintegrale*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 x_3 \\ x_2 x_3 \end{pmatrix}$ und $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$. Hat f ein Potential?

(b) Bestimmen Sie die Länge $L(C)$ für die durch γ parametrisierte Kurve C.

(c) Berechnen Sie $\int\limits_C f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\int\limits_C |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\operatorname{rot} f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2}(x_2x_3) - \partial_{x_3}(x_1x_3) \\ \partial_{x_3}(x_1^2 + x_2^2) - \partial_{x_1}(x_2x_3) \\ \partial_{x_1}(x_1x_3) - \partial_{x_2}(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ 0 \\ x_3 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

Da die Rotation nicht für alle x verschwindet, hat f kein Potential.

(b) Da die letzte Komponente von γ, $t \mapsto t$ injektiv ist und ferner als Ableitung die Funktion $t \mapsto 1$ besitzt, ist die Kurve regulär und doppelpunktfrei parametrisiert. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} L(C) &= \int\limits_C 1\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}\,t = \int\limits_0^{2\pi} \left| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}\,t \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1}\,\mathrm{d}\,t = 2\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

(c) Wir setzen zunächst ein:

$$f(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} (\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 \\ t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}$$

Hieraus erhalten wir mit der Stammfunktion $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin(t)\cos(t)$ von $(\cos(t))^2$ – vgl. Beispiel 3.3.5:

$$\begin{aligned}
\int_C f(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{smallmatrix} \right) \middle| \left(\begin{smallmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{2\pi} -\sin(t) + t(\cos(t))^2 + t\sin(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \left[\cos(t) + t \cdot \frac{1}{2}\left(t + \sin(t)\cos(t)\right) - t\cos(t) \right]_0^{2\pi} \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(t + \sin(t)\cos(t)\right) - \cos(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= 2\pi^2 - 2\pi - \left[\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}(\sin(t))^2 - \sin(t) \right]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi^2 - 2\pi - \pi^2 = \pi^2 - 2\pi
\end{aligned}$$

Ferner erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_C |f(x)|\,\mathrm{d} &= \int_0^{2\pi} |f(C(t))| \cdot |C'(t)|\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2(\cos(t))^2 + t^2(\sin(t))^2} \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{d}\,t = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u &= \left[u\sqrt{1+u^2} \right] - \int \frac{u^2 + (1-1)}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}\,u \\
&= \left[u\sqrt{1+u^2} \right] - \int \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u + \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}\,u \\
&\Rightarrow \\
\int \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}\,u &= \left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\,\mathsf{arsinh}\,(u) \right]
\end{aligned}$$

und erhalten durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}
\int_C |f(x)|\,\mathrm{d} &= \sqrt{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\,\mathsf{arsinh}\,(t) \right]_0^{2\pi} \\
&= \sqrt{2}\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathsf{arsinh}(2\pi)
\end{aligned}$$

wegen $\operatorname{arsinh}(0) = 0$.

Aufgabe H 132. *Zirkulation und Ausfluss*

Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} -y+x \\ \exp\left(x^2+\frac{1}{4}y^2\right) \end{smallmatrix}\right)$ gegeben. Die Ellipse E habe Halbachsenlängen $a = 1$ und $b = 2$ und liege so in einem kartesischen Koordinatensystem, dass die kleine Halbachse auf der x-Achse und die große Halbachse auf der y-Achse liegt.

(a) Ist g konservativ?

(b) Geben Sie eine doppelpunktfreie Parametrisierung von E an.

(c) Bestimmen Sie Zirkulation $Z(g, E)$ und Ausfluss $A(g, E)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, ist g genau dann konservativ, wenn die Rotation verschwindet (Satz 5.2.4). Es ist hierbei

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\exp\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial y}(-y+x) \\ &= 2x\exp\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2\right) + 1 \end{aligned}$$

folglich ist g nicht konservativ.

(b) Gemäß der Beschreibung ist die euklidische Normalform der Ellipse (vgl. Bemerkung 7.3.5, HM1) gegeben durch

$$-x^2 - \frac{y^2}{4} + 1$$

Wie sich durch Einsetzen erkennen lässt, ist eine Parametrisierung daher gegeben durch:

$$C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$$

Diese ist auch doppelpunktfrei: Auf den Teilintervallen $[0, \pi]$ und $[\pi, 2\pi]$ ist der Cosinus jeweils injektiv. Soll also $C(t_1) = C(t_2)$ mit $t_1 < t_2$ gelten, muss $t_1 \in [0, \pi)$ und $t_2 \in (\pi, 2\pi)$ gelten. (Man beachte, dass bei Parametrisierungen $\tilde{C}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ geschlossener Kurven Injektivität nur auf dem Intervall $[a, b)$ überprüft werden muss.) Für diese gilt jedoch $\sin(t_1) > 0 > \sin(t_2)$, also $C(t_1) \neq C(t_2)$.

(c) Wir berechnen

$$C'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$$

und stellen fest, dass wegen

$$|C'(t)| = \sqrt{(\sin(t))^2 + 4(\cos(t))^2} = \sqrt{1 + 3(\cos(t))^3} \geqq 1 > 0$$

die Parametrisierung regulär ist. Wir erhalten mit 5.4.9

$$\begin{aligned}
Z(g,E) &= \int_0^{2\pi} \langle g(C(t)) \,|\, C'(t) \rangle \,\mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -2\sin(t)+\cos(t) \\ \mathrm{e}^{(\cos(t))^2+\frac{1}{4}(2\sin(t))^2} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{2\pi} 2(\sin(t))^2 - \sin(t)\cos(t) + 2\mathrm{e}\cos(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{2\pi} 2 - 2(\cos(t))^2 - \sin(t)\cos(t) + 2\mathrm{e}\cos(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&\quad \text{vgl. Beispiel 3.3.5} \\
&= \Big[2t - (t+\sin(t)\cos(t)) + (\cos(t))^2 + 2\mathrm{e}\sin(t)\Big]_0^{2\pi} = 2\pi
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
A(g,E) &= \int_0^{2\pi} \left\langle g(C(t)) \middle| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} C'(t) \right\rangle \mathrm{d}\,t = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -2\sin(t)+\cos(t) \\ \mathrm{e}^{(\cos(t))^2+\frac{1}{4}(2\sin(t))^2} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\,t \\
&= \int_0^{2\pi} -4\sin(t)\cos(t) + 2(\cos(t))^2 + \mathrm{e}\sin(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \Big[4\,(\cos(t))^2 + t + \sin(t)\cos(t) - 2\mathrm{e}\cos(t)\Big]_0^{2\pi} = 2\pi
\end{aligned}$$

Aufgabe H 133. *Länge von Kurven*

Bestimmen Sie die Längen der durch die folgenden Funktionen parametrisierten Kurven:

(a) $\gamma\colon [-2,2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \big(0, \ln(1+t^2)\big)^\intercal$.

(b) $\gamma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \big(\cos(\exp(-t)), \sin(\exp(-t))\big)^\intercal$.

(c) $\gamma\colon [-2,0] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \big(10t, 4t^2, -3t^2\big)^\intercal$.

(d) $\gamma\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \big(1/2(t+\cos(t)\sin(t)), \frac{1}{2}\,(\sin(t))^2, 1-\cos(t)\big)^\intercal$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir stellen zunächst fest, dass für beliebiges t gilt:

$$\ln(1+t^2) = \ln(1+(-t)^2)$$

Somit ist die Kurve – im Folgenden C genannt – nicht doppelfunktfrei parametrisiert, sondern wird aufgrund er Symmetrie des Intervalls bzgl. $t=0$ zweimal durchlaufen. Bei der Bestimmung der tatsächlichen Länge können (und müssen) wir uns folglich auf ein Teilintervall ($[-2,0]$ oder $[0,2]$) beschränken. Da für alle $t \neq 0$ gilt, dass

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist, ist die Parametrisierung in beiden Fällen dann auch regulär. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} L(C) &= \int_0^2 |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}\, t = \int_0^2 \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}} \,\mathrm{d}\, t = \int_0^2 \frac{2|t|}{(1+t^2)} \,\mathrm{d}\, t \\ &= \int_0^2 \frac{2t}{(1+t^2)} \,\mathrm{d}\, t = \left[\ln(1+t^2)\right]_0^2 = \ln(5) \end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= -\exp(-t) \begin{pmatrix} -\sin(\exp(-t)) \\ \cos(\exp(-t)) \end{pmatrix} && \Rightarrow \\ |\gamma'(t)| &= \exp(-t)\sqrt{(\sin(\exp(-t)))^2 + (\cos(\exp(-t)))^2} = \exp(-t) \end{aligned}$$

Da Sinus und Kosinus nicht an keiner Stelle gleichzeitig den Wert 0 annehmen und die Expontialfunktion stets positiv ist, ist die Parametrisierung regulär. Ferner gilt für $t \geqq 0$

$$\exp(-t) \in (0,1] \subsetneqq \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Da Sinus und Cosinus auf dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ injektiv sind und die Exponentialfunktion auf gesamt $\mathbb{R}$, ist auch γ injektiv, insbesondere ist die Kurve also doppelpunktfrei parametrisiert. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}\, t &= \lim_{r\to\infty} \int_0^r \exp(-t) \,\mathrm{d}\, t = \lim_{r\to\infty} \left[-\exp(-t)\right]_0^r \\ &= \lim_{r\to\infty} -\exp(-r) + 1 = 1 \end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \begin{pmatrix} 10 \\ 8t \\ -6t \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \\ |\gamma'(t)| &= \sqrt{10^2 + 64t^2 + 36t^2} = 10\sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

Da letzterer Ausdruck stets größer 0 ist, ist die Parametrisierung regulär. Da ferner $t \mapsto 10t$ bijektiv ist, ist die Kurve doppelpunktfrei parametrisiert. Wie in H 131 berechnet, ist $\int \sqrt{1+u^2} \,\mathrm{d}\, u = \left[\frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2} + \mathsf{arsinh}(u)\right)\right]$, es folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^\infty |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}\, t &= 10\left[\frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2} + \mathsf{arsinh}(u)\right)\right]_{-2}^0 \\ &= 10\sqrt{5} + 5\,\mathsf{arsinh}(2) \end{aligned}$$

(da $-\mathsf{arsinh}(-2) = \mathsf{arsinh}(2)$ gilt.)

(d) Es ist

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+(\cos(t))^2-(\sin(t))^2) \\ \sin(t)\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos(t))^2 \\ \sin(t)\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \\
|\gamma'(t)| &= \sqrt{(\cos(t))^4+(\sin(t))^2(\cos(t))^2+(\sin(t))^2} \\
&= \sqrt{(\cos(t))^2\left((\cos(t))^2+(\sin(t))^2\right)+(\sin(t))^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Analog zu (c) folgern wir hieraus, dass die Parametrisierung regulär ist. Ferner ist $t \mapsto (\cos(t))^2$ im Inneren der Intervallen $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ und $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ jeweils >0, die erste Komponente also streng monoton steigend. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}\cos(t_1)\sin(t_1) &< \frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2}\cos(t_2)\sin(t_2) \quad \forall t_1,t_2 \in \left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right], t_1<t_2 \\
\frac{1}{2}t_3+\frac{1}{2}\cos(t_3)\sin(t_3) &< \frac{1}{2}t_4+\frac{1}{2}\cos(t_4)\sin(t_4) \quad \forall t_3,t_4 \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], t_3<t_4 \\
\frac{1}{2}t_5+\frac{1}{2}\cos(t_5)\sin(t_5) &< \frac{1}{2}t_6+\frac{1}{2}\cos(t_6)\sin(t_6) \quad \forall t_5,t_6 \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right], t_5<t_6
\end{aligned}$$

Für beliebige $\tilde{t}_1,\tilde{t}_2 \in [-\pi,\pi], \tilde{t}_1<\tilde{t}_2$ folgt hieraus ebenfalls

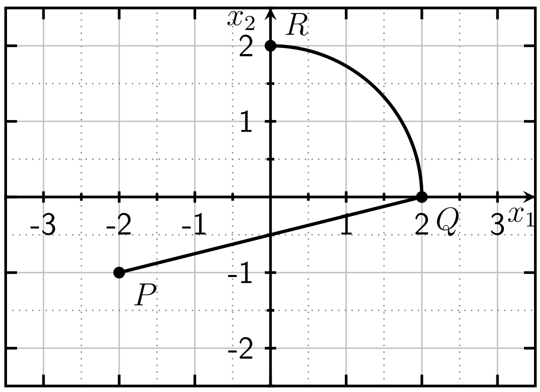
$$\frac{1}{2}\tilde{t}_1+\frac{1}{2}\cos(\tilde{t}_1)\sin(\tilde{t}_1) < \frac{1}{2}\tilde{t}_2+\frac{1}{2}\cos(\tilde{t}_2)\sin(\tilde{t}_2),$$

(Falls $\tilde{t}_1$ und $\tilde{t}_2$ in unterschiedlichen Teilintervallen sind, ergibt sich dies durch Vergleich mit den dazwischen liegenden Intervallrändern, die in jeweils zwei Teilintervallen liegen.) Insbesondere ist die Parametrisierung doppelpunktfrei. Somit folgt

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}\,t = 2\pi$$

Aufgabe H 134. *Kurvenintegrale und Potentiale*

Es sei K die Kurve, die aus der Strecke von P nach Q und dem Kreisbogen von Q nach R (mit Mittelpunkt im Ursprung) besteht. Weiter sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$.



(a) Geben Sie eine reguläre, doppelpunktfreie Parametrisierung C_1 der Strecke von P nach Q sowie eine reguläre, doppelpunktfreie Parametrisierung C_2 des Kreisbogens von Q nach R an.

(b) Geben Sie $C_1'(t)$ und $C_2'(t)$ an.

(c) Bestimmen Sie $\int\limits_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$.

(d) Bestimmen Sie ein Potential U von ∇f mit $U(0) = 42$.

(e) Bestimmen Sie $\int_K \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir lesen zunächst die Koordinaten ab:

$$P = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Insbesondere stehen die Ortsvektoren von Q und R senkrecht zueinander, womit der Kreisbogen nur einen Winkel in $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\}$ haben kann. Wir erhalten somit aus der Skizze und $|Q| = |R| = 2$:

$$C_1 \colon [0,1] \mapsto \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto P + t(Q-P) = \begin{pmatrix} 4t-2 \\ t-1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 \colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$$

Mit $C_1'(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt, dass die Parametrisierung regulär ist und dass die Parametrisierung doppelpunktfrei ist: Wegen $4 > 0$ ist die erste Komponente von C_1 streng monoton steigend und somit injektiv.
Aus $|C_2'(t)| = \sqrt{4(-\sin(t))^2 + 4(\cos(t))^2} = 2$ folgt, dass auch C_2 regulär ist, die Doppelpunktfreiheit folgt daraus, dass die Nullstellenmengen von Sinus und Kosinus keine gemeinsamen Punkte haben: $\sin(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow |\cos(t)| = 1$.

(b) Wir erhalten:

$$C_1'(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$$

(c) Bezeichnen wir die durch C_j parametrisierte Teilkurve mit K_j $(j = 1,2)$, so erhalten wir mit 5.4.5

$$\int\limits_K f(s)\,\mathrm{d}\,s = \int\limits_{K_1} f(s)\,\mathrm{d}\,s + \int\limits_{K_2} f(s)\,\mathrm{d}\,s$$

$$= \int\limits_0^1 f(C_1(t))|C_1'(t)|\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(C_2(t))|C_2'(t)|\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left((4t-2)^2+(t-1)^2\right)\cdot\sqrt{4^2+1^2}\,\mathrm{d}\,t$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(4(\cos(t))^2+4(\sin(t))^2\right)\cdot\sqrt{4(\sin(t))^2+4(\cos(t))^2}\,\mathrm{d}\,t$$
$$= \frac{\sqrt{17}}{2}\int_0^1 17t^2-18t+5\,\mathrm{d}\,t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\,\mathrm{d}\,t = \frac{\sqrt{17}}{2}\left[\frac{17}{3}t^3-9t^2+5t\right]_0^1 + 2\pi$$
$$= \frac{5\sqrt{17}}{6}+2\pi$$

(d) Da ∇f das Gradientenfeld von f ist, ist f selbst natürlich ein Potential, alle weiteren Potentiale unterscheiden sich von f durch eine additive Konstante. Wir erhalten mit dem Ansatz $U(x) = f(x) + c$ aus der Bedingung $42 = U(0) = f(0) + c = c$ das Potential
$$U(x) = \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+42$$

(e) Es gibt zwei mögliche Lösungswege:

- *1. Lösungsweg (Ausnutzung des Potentials):*
$$\int_K f(x)\bullet\mathrm{d}\,x = \int_{K_1} f(x)\bullet\mathrm{d}\,x + \int_{K_2} f(x)\bullet\mathrm{d}\,x$$
$$= U(C_1(1)) - U(C_1(0)) + U\left(C_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - U\left(C_2\left(0\right)\right)$$
es gilt $C_1(1) = C_2(0)$
$$= U\left(C_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - U(C_1(0))$$
$$= U(R) - U(P) = \frac{1}{2}(2^2+0^2) - \frac{1}{2}((-2)^2+(-1)^2) = -\frac{1}{2}$$

- *2. Lösungsweg (direkte Rechnung):*
Mit $\nabla f(x) = x$ erhalten wir – man beachte, dass die Kurve regulär parametrisiert ist (Sinus und Kosinus werden an keiner Stelle gleichzeitig null):
$$\int_K \nabla f(x)\bullet\mathrm{d}\,x = \int_{K_1} \nabla f(x)\bullet\mathrm{d}\,x + \int_{K_2} \nabla f(x)\bullet\mathrm{d}\,x$$
$$= \int_0^1 \langle C_1(t)\,|\,C_1'(t)\rangle\,\mathrm{d}\,t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle C_2(t)\,|\,C_2'(t)\rangle\,\mathrm{d}\,t$$
$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix}4t-2\\ t-1\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right\rangle\mathrm{d}\,t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}2\cos(t)\\ 2\sin(t)\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{pmatrix}-2\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}\right\rangle}_{=0}\mathrm{d}\,t$$
$$= \int_0^1 17t-9\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{17}{2}t^2-9t\right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

Aufgabe H 135. *Kurvenintegrale und Potentiale II*
Für jedes Paar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 x_1^2 x_3 \\ 8x_3^2 \\ 3x_1^3 + b^4 x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von f.

(b) Für welche Paare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ besitzt f ein Potential?

(c) Berechnen Sie ein Potential von f für $(a,b) = (3,2)$.

(d) Sei K die durch $C : [1,2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \\ 2 \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve. Berechnen Sie für $(a,b) = (3,2)$ das Integral $\displaystyle\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Durch Differenzieren erhält man:

$$\mathrm{J}f\,(x) = \begin{pmatrix} 2a^2 x_1 x_3 & 0 & a^2 x_1^2 \\ 0 & 0 & 16x_3 \\ 9x_1^2 & b^4 x_3 & b^4 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\mathrm{div} f(x)}_{=\mathrm{Sp}\,\mathrm{J}f(x)} = 2a^2 x_1 x_3 + b^4 x_2$$

$$\mathrm{rot} f(x) = \begin{pmatrix} (b^4 - 16)x_3 \\ (a^2 - 9)x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Die notwendige und – da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist – auch hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials lautet somit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \mathrm{rot} f(x) = \begin{pmatrix} (b^4 - 16)x_3 \\ (a^2 - 9)x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also $(a,b) \in \{(3,2), (3,-2), (-3,2), (-3,-2)\}$.

(c) Wegen $\mathrm{grad}(U) = f$ gilt zunächst

$$U(x) = \int 9x_1^2 x_3 \ \mathrm{d}\, x_1 = 3x_1^3 x_3 + c_1(x_2, x_3).$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial x_2} U(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_2} c_1(x_2, x_3) \stackrel{!}{=} 8x_3^2$$

folgt $c_1(x_2, x_3) = 8x_2 x_3^2 + c_2(x_3)$ und schließlich

$$\frac{\partial}{\partial x_3} U(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^3 + 16x_2 x_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} c_2(x_3) \stackrel{!}{=} 3x_1^3 + 16x_2 x_3\,.$$

Also ist $c_2(x_3)$ konstant. Ein Potential ist somit $U(x) = 3x_1^3 x_3 + 8x_2 x_3^2$.

(d) Es gibt auch hier zwei mögliche Lösungswege:

- *1. Lösungsweg (Ausnutzung des Potentials):*

$$\begin{aligned}\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= U(C(2)) - U(C(1)) = U\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) - U\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right)\\ &= 6-(-6) = 12\end{aligned}$$

- *2. Lösungsweg (direkte Rechnung):*

$$\begin{aligned}\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x &= \int_1^2 f(C(t)) \cdot C'(t)\ \mathrm{d}\,t\\ &= \int_1^2 \begin{pmatrix}18(\cos(\pi t))^2\\32\\3(\cos(\pi t))^3 + 32\sin(\pi t)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-\pi\sin(\pi t)\\ \pi\cos(\pi t)\\0\end{pmatrix}\ \mathrm{d}\,t\\ &= \int_1^2 -18\pi(\cos(\pi t))^2\sin(\pi t) + 32\pi\cos(\pi t)\ \mathrm{d}\,t\\ &= -18\pi\int_1^2 (\cos(\pi t))^2\sin(\pi t)\ \mathrm{d}\,t + \underbrace{[32\sin(\pi t)]_1^2}_{=0}\\ &\quad u := \cos(\pi t) \ \rightarrow\ u'(t) = -\pi\sin(\pi t)\\ &= 18\int_{u(1)}^{u(2)} u^2\,\mathrm{d}\,u = \left[6u^3\right]_{-1}^{1} = 12\end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 136. *Taylorpolynome*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos(x)}$.

Bestimmen Sie $T_2(f,x,0)$ und $R_2(f,x,0)$.

Lösungshinweise hierzu: Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x) &= \frac{\sin(x)}{(2+\cos(x))^2}\\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2} f(x) &= \frac{\cos(x)(2+\cos(x))^2 - 2\sin(x)(2+\cos(x))(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^4}\\ &= \frac{\cos(x)(2+\cos(x)) + 2(\sin(x))^2}{(2+\cos(x))^3}\\ &= \frac{2\cos(x) + (\sin(x))^2 + 1}{(2+\cos(x))^3}\end{aligned}$$

und erhalten:

$$T_2(f,x,0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}x^2$$