J. Meißner

Höhere Mathematik 2

13. Vortragsübung zur Vorlesung

Sommersemester 2024

M. Stroppel

Die Aufgaben zur Vortragsübung werden besprochen am Donnerstag, den 27. Juni,
um 14:00 Uhr in V53.01 (cbiw, ft, geod, mach, medtech, tema).
um 15:45 Uhr in V53.01 (bau, bewe, ernen, iui, lrt, mawi, umw, ving).

Aufgabe V 37. *Diskussion einer Funktion in zwei Veränderlichen*

Wir untersuchen die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \cos(y \cdot \mathrm{e}^{(x^2)}).$$

(a) Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

(b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f im Punkt $(x_0, y_0)^\top = (-1, \frac{\pi}{2\mathrm{e}})^\top$.

(c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, \binom{x}{y}, \binom{x_0}{y_0})$ von f der Stufe 2.

(d) Bestimmen Sie die Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0, f\binom{x_0}{y_0})^\top$ an den Graphen von f.

(e) Bestimmen und skizzieren Sie die Niveaumengen $\mathcal{N}_1$ und $\mathcal{N}_{-1}$ der Funktion f zum Niveau 1 bzw. -1. Auf der Rückseite finden Sie einen Vordruck für Ihre Skizze.

(f) Finden und skizzieren Sie alle Stellen im $\mathbb{R}^2$, an denen der Gradient von f verschwindet.

Aufgabe V 38. *Stetigkeit*

Seien $j, k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $j + k > 2n$. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion stetig ist:

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^j y^k}{(x^2+y^2)^n} & \text{falls } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{falls } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$$

Nutzen Sie Polarkoordinaten $\binom{x}{y} = r\binom{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$ und zeigen Sie: Aus $|\binom{x}{y}| < 1$ folgt $|g\binom{x}{y}| \leqq |\binom{x}{y}|$.

Aufgabe V 39. *Partielle Differenzierbarkeit*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{falls } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}.$$

(a) Ist f stetig?

(b) Zeigen Sie, dass f stetig partiell differenzierbar ist und geben Sie die ersten partiellen Ableitungen an.

(c) Berechnen Sie $f_{xy}\binom{0}{0}$ und $f_{yx}\binom{0}{0}$.

(d) Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar?


y
π
πe^{-x^2}
1
x