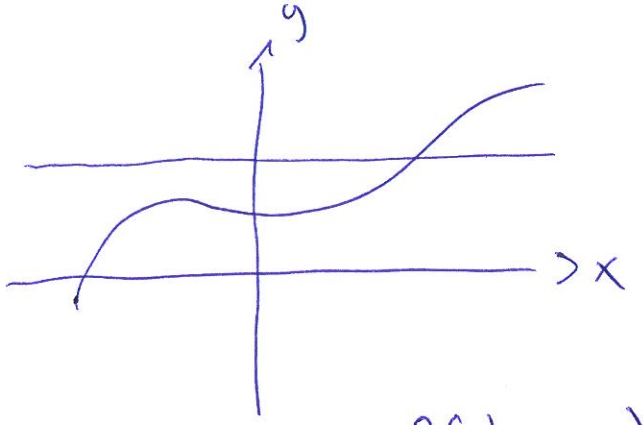
V2.1

$f: A \to B, \; x \mapsto f(x)$

f injektiv $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$



f surjektiv $\Leftrightarrow (\forall y \in B \; \exists x \in A : f(x) = y)$

f bijektiv $\Leftrightarrow$ (f injektiv) $\wedge$ (f surjektiv)

(a) $f_1(x) = x^2 - 4x + 1 + 3 - 3$
$= (x^2 - 4x + 4) - 3 = (x-2)^2 - 3$

<u>Injektivität:</u>

f_1 symmetrisch bzgl. der Achse $x = 2$, d.h.

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_1(2+x) = f_1(2-x)$

für $x = 2$ haben wir $f_1(4) = 1 = f_1(0)$ und somit ist f_1 nicht injektiv.

<u>Surjektiv:</u> Sei $y \in [-3, \infty)$. Gesucht ist $x \in \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 - 3 = y$$

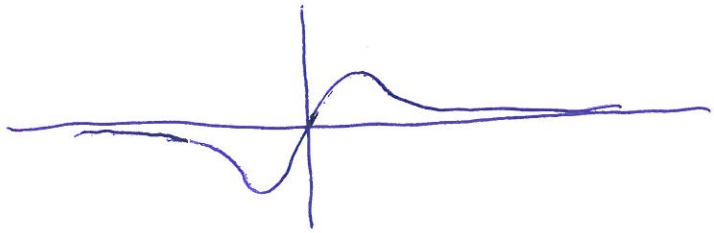
$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = y+3$$

$$\Leftrightarrow \quad |x-2| = \sqrt{y+3} \quad (\text{ex., da } y+3 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2+\sqrt{y+3} \ \wedge \ x = 2-\sqrt{y+3}$$

Somit ist f_1 surjektiv.

(b) $f_2(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$



<u>Injektivität</u>

Sei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f_2(x_1) = f_2(x_2)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{1+x_1^2} = \frac{x_2}{1+x_2^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1(1+x_2^2) = x_2(1+x_1^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_1x_2^2 - x_2 - x_2x_1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1-x_2)(1-x_1x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x_1-x_2=0) \ \vee \ (1-x_1x_2=0)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 \qquad \overset{x_2 \neq 0}{\Rightarrow} \quad x_1 = 1/x_2$$

$$f_2(x) = \frac{x}{1+x^2} \overset{x\neq 0}{=} \frac{x}{1+x^2}\,\frac{1/x^2}{1/x^2} = \frac{1/x}{(\frac{1}{x})^2+1} = f_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

Es folgt $f_2(2) = \dfrac{2}{1+4} = \dfrac{2}{5} = \dfrac{1/2}{1+(1/2)^2} = \dfrac{1/2}{5/4} = \dfrac{2}{5}$

Somit ist f_2 nicht injektiv.

Surjektivität:

Wegen $f_2(x) = f_2(1/x)$ (für $x \neq 0$) gilt:

$$f_2(\mathbb{R}) = f_2([-1,1])$$

Sei $x \in [0,1]$:

$$f_2(x) = \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{x}{1} \leq 1$$

analog für $x \in [-1,0]$:

$$f_2(x) = \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{x}{1} \geq -1$$

Somit ist f_2 nicht surjektiv, da der Wert 2 nicht angenommen wird.

(c) Injektivität

Sei $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $f_3(n_1) = f_3(n_2)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad 2n_1 - 1 &= 2n_2 - 1 \\ \Leftrightarrow \quad 2n_1 &= 2n_2 \\ \Leftrightarrow \quad n_1 &= n_2 \end{aligned}$$

Somit ist f_3 injektiv.

Surjektivität:

Sei $2 \in \mathbb{N}$: Gesucht $n \in \mathbb{N}$: $f_3(n) = 2$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad 2n - 1 &= 2 \\ \Leftrightarrow \quad \underbrace{2n}_{\text{Gerade}} &= \underbrace{3}_{\text{Ungerade}} \quad \lightning \end{aligned}$$

V. 2.2

"(a) $\Rightarrow$ (b)"

Wir zeigen die Kontraposition, d.h. $\neg(b) \Rightarrow \neg(a)$.

Aus den Übungen (Blatt 2 Aufgabe 5 (b)) wissen wir:

$$\forall_{C_1, C_2 \subseteq A} \; f(C_1 \cap C_2) \subseteq f(C_1) \cap f(C_2)$$

Damit

$$\neg(b) \Leftrightarrow \exists_{C_1, C_2 \subseteq A} : \; f(C_1 \cap C_2) \subsetneq f(C_1) \cap f(C_2)$$

$$\Leftrightarrow \exists_{y \in B} : \; y \in f(C_1) \cap f(C_2) \wedge y \notin f(C_1 \cap C_2)$$

$$\Leftrightarrow \exists_{y \in B} : (\exists_{x_1 \in C_1} \exists_{x_2 \in C_2} : f(x_1) = y = f(x_2)) \wedge (\forall_{x \in C_1 \cap C_2} f(x) \neq y)$$

$$\Rightarrow \exists_{x_1, x_2 \in A} : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

$\Rightarrow$ f ist nicht injektiv

"(b) $\Rightarrow$ (a)"

Auch hier zeigen wir die Kontraposition $\neg(a) \Rightarrow \neg(b)$:

Sei also f nicht injektiv. Dann ex. $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2) =: y$.

Setze $C_1 := \{x_1\}$, $C_2 := \{x_2\}$, dann $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ und somit

$$\emptyset = f(\emptyset) = f(C_1 \cap C_2) \subsetneq f(C_1) \cap f(C_2) = \{y\} \cap \{y\} = \{y\}.$$

V.2.3

(a) Mit V.2.2 gilt

h ist injektiv $\Leftrightarrow \forall_{A_1, A_2 \subseteq A}\ h(A_1 \cap A_2) = h(A_1) \cap h(A_2)$

$$h(A_1 \cap A_2) = g(\underbrace{f(A_1 \cap A_2)}_{\subseteq f(A_1) \cap f(A_2)})$$

$$\subseteq g(f(A_1) \cap f(A_2))$$

$$\subseteq g(f(A_1)) \cap g(f(A_2)) = h(A_1) \cap h(A_2)$$

"$=$" gilt, wenn f und g injektiv sind, d.h.

$(f \text{ injektiv}) \wedge (g \text{ injektiv}) \Rightarrow h$ injektiv (hinreichend)

Sei f nicht injektiv, dann ex. $x_1, x_2 \in A$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ und $x_1 \neq x_2$. Damit

$$h(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = h(x_2)$$

und es folgt h ist nicht injektiv, d.h.

$(f \text{ nicht injektiv} \Rightarrow h \text{ nicht injektiv})$

$\Leftrightarrow (h \text{ ~~nic~~ injektiv}) \Rightarrow f$ injektiv (notwendig)

(b) h surjektiv $\Leftrightarrow h(A) = C$

$$h(A) = g(\underbrace{f(A)}_{\subseteq B}) \subseteq g(B) \subseteq C$$

Es folgt

$(f \text{ surjektiv}) \wedge (g \text{ surjektiv}) \Rightarrow h$ surjektiv (hinreichend)

und

h surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv (notwendig)

Nachtrag:

$$f(A) := \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\} \subseteq B$$

Es gilt für $B_1, B_2 \subseteq B$ mit $B_1 \subseteq B_2$:

$$g(B_1) = \{z \in C \mid \exists y \in B_1 : \cancel{f(x)}\, g(y) = z\}$$
$$\cap\!\!\shortparallel$$
$$g(B_2) = \{z \in C \mid \exists y \in B_2 : g(y) = z\}$$

V.24

(a) I.A. $(n=1)$

$$(a-b)\cdot\sum_{k=0}^{1} a^k b^{1-k} = (a-b)\cdot(b+a) = a^2-b^2 = a^{1+1}-b^{1+1} \checkmark$$

I.S. $(n \to n+1)$

Annahme: Es gilt für n: $(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \overset{(*)}{=} a^{n+1}-b^{n+1}$

Es folgt

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n+1-k} = (a-b)\left(\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n+1-k}\right) + \underbrace{a^{n+1}}_{=a^{n+1}\cdot b^0}\right)$$

$$= (a-b)\left(b\left(\sum_{k=0}^{n} a^k \cdot b^{n-k}\right) + a^{n+1}\right)$$

$$= b\cdot\underbrace{(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right)}_{\overset{*}{=} a^{n+1}-b^{n+1}} + (a-b)a^{n+1}$$

$$= b\left(a^{n+1}-b^{n+1}\right) + a^{n+2} - ba^{n+1}$$

$$= ba^{n+1} - b^{n+2} + a^{n+2} - ba^{n+1}$$

$$= a^{n+2} - b^{n+2}$$

$$= a^{(n+1)+1} - b^{(n+1)+1}$$

(b) zz $\forall_{n\in\mathbb{N}} \exists_{m_n\in\mathbb{N}} : 5^n+7 = 4m_n$

<u>I. A. (n=1)</u>

$5^1 + 7 = 12 = 4\cdot 3$, d.h. $m_1 = 3$.

<u>I.S. (n→n+1)</u>

Annahme: Es gilt $5^n \cdot 7 \overset{(*)}{=} 4\cdot m_n$ für ein $m_n \geq 3$.

Es folgt

$$
\begin{aligned}
5^{n+1} + 7 &= 5\cdot 5^n + 7 \\
&= 5\cdot(5^n+7-7)+7 \\
&= 5\cdot(5^n+7) - 35 + 7 \\
&= 5\cdot 4\cdot m_n - 28 \\
&= 4(5m_n - 7) = 4\cdot m_{n+1}
\end{aligned}
$$

und $m_{n+1} = 5\cdot m_n - 7 \geq 5\cdot 3 - 7 = 8 \geq 3$.

V.2.5

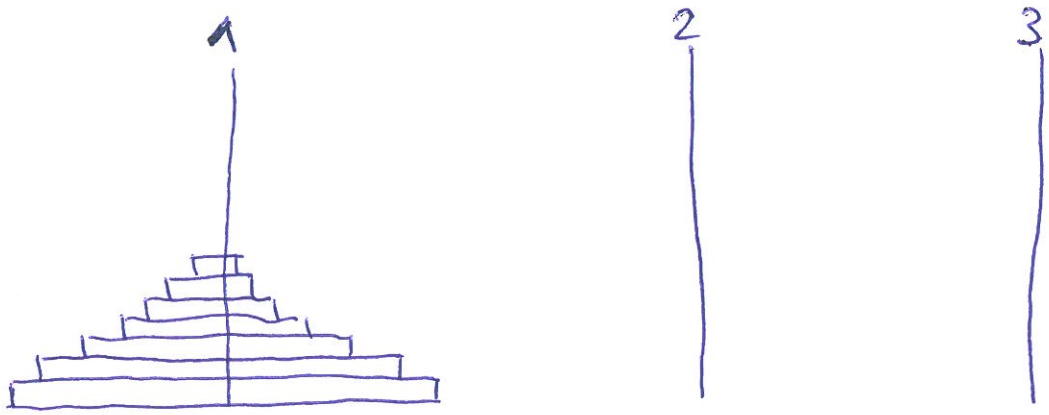
I.A. ($n=1$)

Für $n=1$ besteht der Hanoi-Turm nur aus einem Stein. Dieser kann in $2^1-1=1$ Zügen auf eine andere Stange gesetzt werden.

I.S. ($n \to n+1$)

Annahme: Ein Hanoi-Turm mit n Steinen kann mit 2^n-1 Zügen auf eine andere Stange versetzt werden.

Wir haben nun einen Hanoi-Turm mit $n+1$ Steinen.



Um den Turm von Stange 1 auf Stange 2 oder 3 zu versetzen müssen zunächst die n kleineren Steine auf Stange 2 oder 3 versetzt werden. Dafür braucht es nach Annahme 2^n-1 Züge. Nun kann der $(n+1)$-te Stein versetzt werden (1 Zug). Anschließend müssen die n Steine wieder auf dem $(n+1)$ Stein platziert werden. Nach Annahme benötigt dies 2^n-1 Züge.

Insgesamt braucht man also

$$(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

Züge.