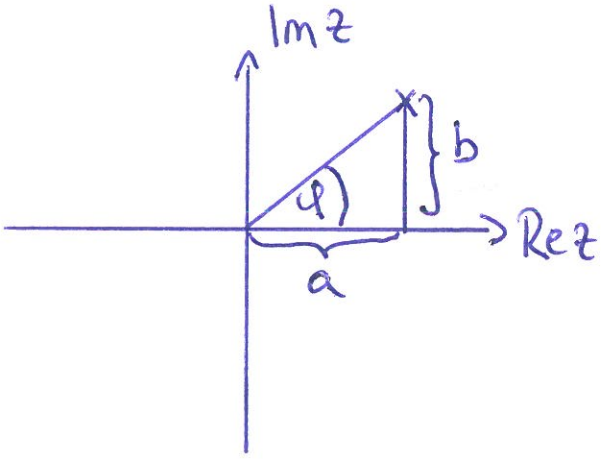
V.5.1

$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ist bijektiv mit Inverse $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Da tan ungerade ist gilt dies auch für arctan, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan(-x) = -\arctan(x)$$

Sei nun $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

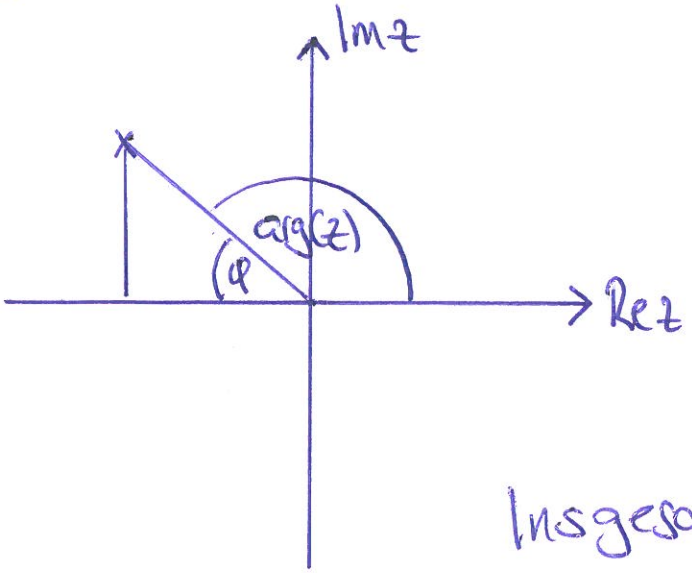
Fall 1 $(a > 0)$



Es gilt $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$, d.h.

$\arctan(\frac{b}{a}) = \varphi = \arg(z)$

Fall 2 $(a < 0, b \geq 0)$



Es gilt

$\arg(z) = \pi - \varphi$

und $\varphi = \arctan(\frac{b}{-a})$

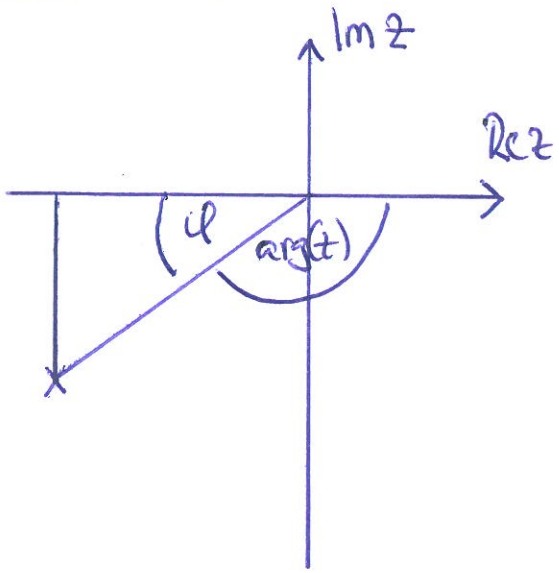
$= -\arctan(b/a)$,

denn a ist negativ.

Insgesamt:

$\arg(z) = \pi + \arctan(b/a)$

Fall 3 ($a<0, b<0$)



Es gilt $\arg(z) = -\pi + \varphi$

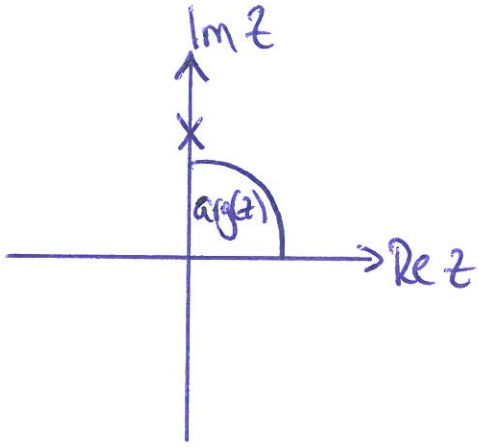
und

$\varphi = \arctan\left(\frac{-b}{-a}\right) = \arctan(b/a)$.

Insgesamt

$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$

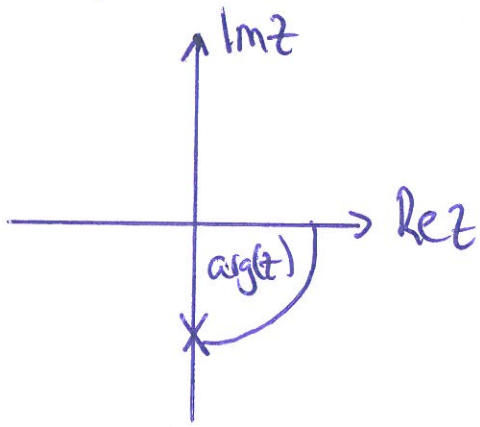
Fall 4 ($a=0, b>0$)



Es gilt

$\arg(z) = \pi/2$

Fall 5 ($a=0, b<0$)



Es ist $\arg(z) = -\pi/2$

V S.2.

(a) $z_1 = (1-2i)^2 - (2+i)^2$

$= 1 - 4i + (2i)^2 - (4 + 4i - i^2)$

$= 1 - 4i - 4 - 4 - 4i + 1$

$= -6 - 8i$ (kartesische Darstellung)

Es folgt

$$|z_1| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

und mit V.S.1 folgt

$$\arg(z_1) = \arctan\left(\frac{-8}{-6}\right) - \pi = \arctan(4/3) - \pi.$$

Damit

$$z_1 = 10\, e^{i(\arctan(4/3) - \pi)}$$ (Polardarstellung)

(b) $z_2 = 4 e^{i\pi/2} - (1+i)$

$= 4(\underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} + i \underbrace{\sin(\pi/2)}_{=1}) - 1 - i$

$= 4i - 1 - i = -1 + 3i$ (Kart. Darstellung)

Dann $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ und

$$\arg(z_2) = \pi + \arctan\left(\frac{3}{-1}\right) = \pi - \arctan(3).$$

Also

$$z_2 = \sqrt{10}\, e^{i(\pi - \arctan(3))}$$ (Polardarstellung)

(c) $z_3 = \frac{2i}{3-4i} = \frac{2i}{3-4i} \frac{3+4i}{3+4i}$

$= \frac{6i-8}{3^2+4^2} = \frac{1}{25}(-8+6i)$ (kart. Darstellung)

Dann $|z_3| = \frac{1}{25}\sqrt{64+36} = \frac{1}{25} \cdot 10 = \frac{2}{5}$ und

$\arg(z_3) = \pi + \arctan\left(\frac{6}{-8}\right) = \pi - \arctan(3/4)$

also

$z_3 = \frac{2}{5} e^{i(\pi - \arctan(3/4))}$

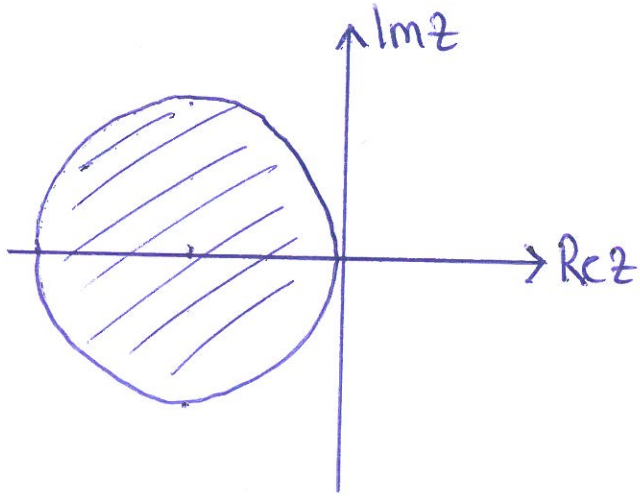
(Polardarstellung)

V.5.3

(a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 + 2\operatorname{Re} z \leq 0\}$

$= \{z = a+ib : a,b \in \mathbb{R} \wedge a^2+b^2+2a \leq 0\}$

$= \{z = a+ib : a,b \in \mathbb{R} \wedge \underbrace{(a^2+2a+1)}_{=(a+1)^2} + b^2 \leq 1\}$

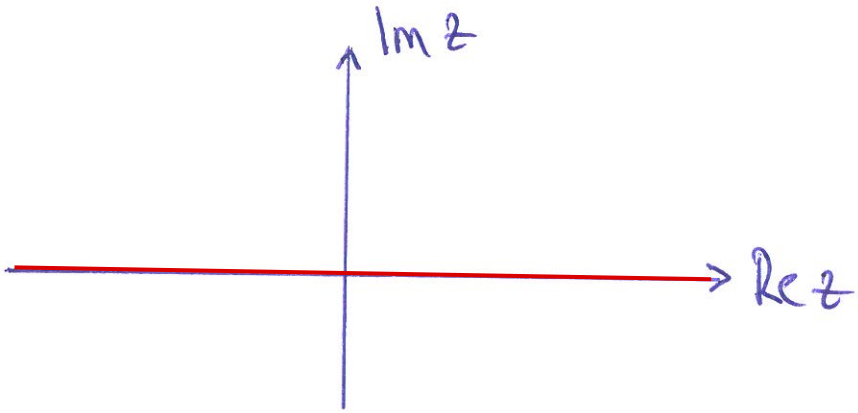


(b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2\}$

$= \{z = a+ib : a,b \in \mathbb{R} \wedge a^2+b^2 = a^2-b^2\}$

$= \{z = a+ib : a,b \in \mathbb{R} \wedge 2b^2 = 0\}$

$= \{z = a+ib : a,b \in \mathbb{R} \wedge b = 0\}$



V.5.3

(c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| \leq |z-i| \wedge \operatorname{Im} z \geq (\operatorname{Re} z)^2 - 2\}$

Da $|z+1| \geq 0$ und $|z-i| \geq 0$ gilt

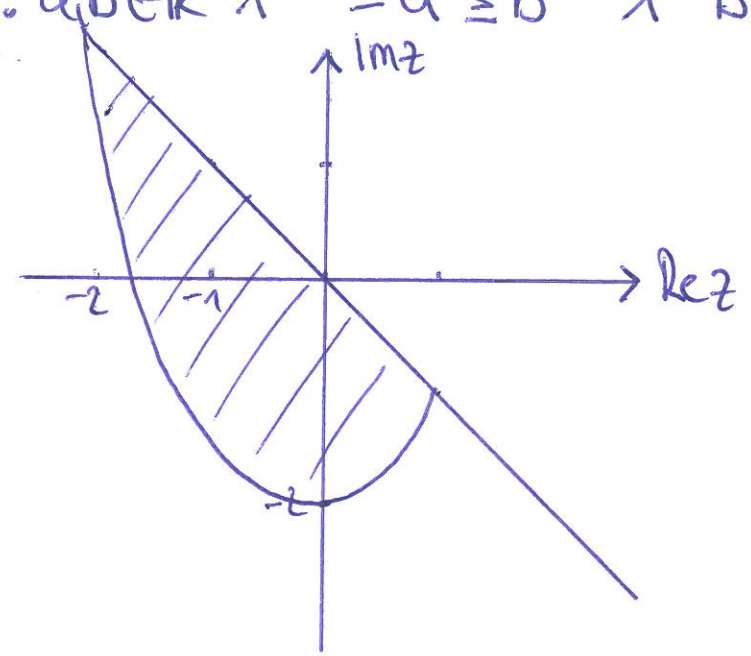
$$|z+1| \leq |z-i| \iff |z+1|^2 \leq |z-i|^2.$$

Somit

$$M_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1|^2 \leq |z-i|^2 \wedge \operatorname{Im} z \geq (\operatorname{Re} z)^2 - 2\}$$

$$= \{z = a+ib : a,b \in \mathbb{R} \wedge \underbrace{(a+1)^2+b^2}_{=a^2+2a+1+b} \leq \underbrace{a^2+(b-1)^2}_{=a^2+b^2+1-2b} \wedge b \geq a^2-2\}$$

$$= \{z = a+ib : a,b \in \mathbb{R} \wedge -a \geq b \wedge b \geq a^2-2\}$$



V.5.4

Zuerst müssen wir eine Nullstelle (NS) von p finden. Dazu verwenden wir den folgenden Satz:

Satz von der rationalen Nullstelle:

Sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ein Polynom mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Sei $z^* = \frac{l}{m}$ eine rationale Nullstelle von p und l, m Teilerfremd (d.h. der Bruch ist maximal gekürzt). Dann gilt

$$l \text{ teilt } a_0 \quad \text{und} \quad m \text{ teilt } a_n$$

Wir wollen nun eine rationale NS $z^* = l/m$ des Polynoms

$$p(z) = 2z^3 - 9z^2 + 30z - 13$$

finden. Nach obigem Satz muss dann gelten

$$l \text{ teilt } -13 \quad \Rightarrow \quad l \in \{\pm 1, \pm 13\}$$

und

$$m \text{ teilt } 2 \quad \Rightarrow \quad m \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

Bilden wir alle Kombinationen so kommen nur

$$\pm 1, \pm 13, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{13}{2}$$

In Frage.

Durch Testen erhalten wir

$$p(\tfrac{1}{2}) = 2\cdot(\tfrac{1}{2})^3 - 9\cdot(\tfrac{1}{2})^2 + 30\,\tfrac{1}{2} - 13$$
$$= \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{9}{4}}_{=-2} + \underbrace{15-13}_{=+2} = 0$$

und $p(\pm 1) \neq 0$, $p(-\frac{1}{2}) \neq 0$, $p(\pm 13) \neq 0$, $p(\pm \frac{13}{2}) \neq 0$.

Demnach ist $z_1 = \frac{1}{2}$ die einzige rationale Nullstelle.

Es folgt mit Polynomdivision

$$(2z^3 - 9z^2 + 30z - 13) : (z - \tfrac{1}{2}) = 2z^2 - 8z + 26$$
$$\begin{array}{l}
-(2z^3 - z^2) \\ \hline
\quad -8z^2 + 30z - 13 \\
-(-8z^2 + 4z) \\ \hline
\qquad 26z - 13 \\
\qquad -(26z - 13) \\ \hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Also

$$2z^3 - 9z^2 + 30z - 13 = (z - \tfrac{1}{2}) \cdot \underbrace{(2z^2 - 8z + 26)}_{(*)}$$

Mit der Mitternachtsformel erhalten wir für $(*)$

$$z_{2/3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 208}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{-144}}{4} = 2 \pm 3i$$

Somit hat p die Nullstellen

$$z_1 = \tfrac{1}{2}, \quad z_2 = 2 + 3i, \quad z_3 = 2 - 3i$$