Vg.1

Geg. $f: x \to \underbrace{\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}} - \frac{x^3}{x^2-3x}$

$$= \frac{x^3-3x-2}{(x+1)^2} - \frac{x^3}{x(x-3)}$$

Der max. Definitionsbereich ist gegeben durch

$$D_f := \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 3\}$$

Es gilt

$$(x^3-3x-2) : (x+1) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

$$\begin{array}{l}
-(x^3+x^2) \\
\quad -x^2-3x-2 \\
\quad -(-x^2-x) \\
\hline
\qquad -2x-2 \\
\qquad -2x-2 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Insgesamt $x^3-3x-2 = (x-2)(x+1)^2$

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)^2}{(x+1)^2} - \frac{x^3}{x(x-3)}$$

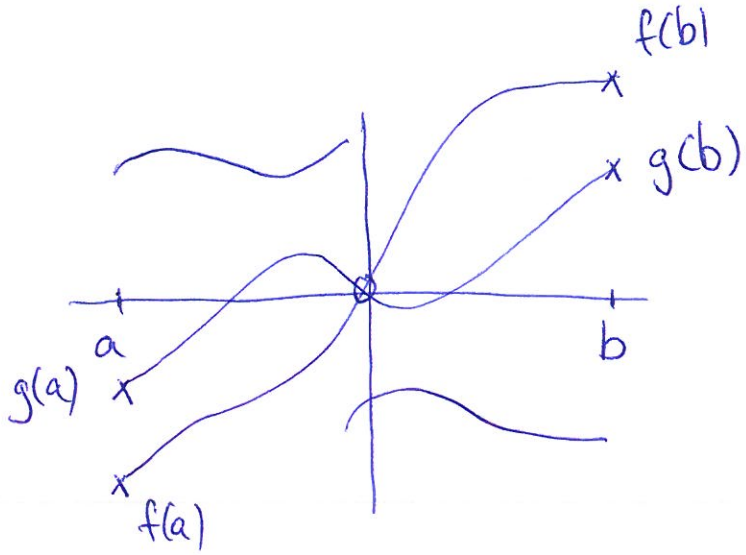
f kann fortgesetzt werden in $x=-1$ durch

$$f(-1) := (-1-2) - \frac{(-1)^3}{-1(-1-3)} = -3 + \frac{1}{4} = -\frac{11}{4}$$

f kann in $x=0$ fortgesetzt werden durch

$$f(0) := -2$$

V.92



Tip: $f(c) = g(c) \iff f(c) - g(c) = 0$

Wir definieren $h := f - g$. Es gilt

$$h(a) = f(a) - g(a) < 0$$

und $$h(b) = f(b) - g(b) > 0$$

und h ist stetig als Differenz stetiger Funktionen

Nach dem ZWS ex. ein $c \in [a,b]$ mit

$$h(c) = 0 \iff f(c) - g(c) = 0 \iff f(c) = g(c)$$

V 9.3

a) <u>Schritt 1:</u>

Für jedes abg. Intervall $I = [a,b]$ gilt

$f|_I$ ist streng mon. wachsend ($\nearrow$)

oder streng mon. fallend ($\searrow$).

Sei $a < b$, $I := [a,b]$. Dann gilt

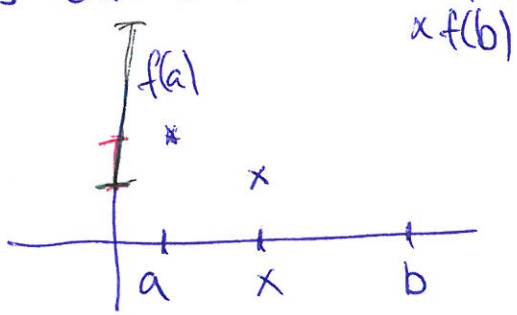
$$\underbrace{f(a) < f(b)}_{\text{oBdA dieser Fall}} \quad \vee \quad f(a) > f(b)$$

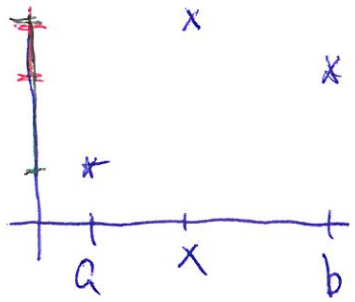
Sei nun $x \in (a,b)$, dann gilt

$$f(a) < f(x) < f(b),$$

denn

ang. $f(x) \leq f(a)$ dann folgt mit dem ZWS, dass die Werte in $[f(x), f(a)]$ werden mind 2x angenommen





Also muss $f(a) < f(x)$ gelten. Analog gilt auch $f(x) < f(b)$.

Sei nun $a \leq x < y \leq b$

<u>Fall 1</u>: $x = a$ oder $y = b$

Mit obigem folgt: $f(x) < f(y)$

<u>Fall 2</u>: $(a < x < y < b)$

Setze $\tilde{I} = [x, b]$, dann $f(x) < f(b)$

Es folgt mit obigem:

$$f(x) < f(y) \; (< f(b))$$

Somit ist $f|_I$ ~~no~~ $\nearrow$

<u>Schritt 2</u>: Für Intervalle $I \subseteq \hat{I}$ gilt

$$f|_I \nearrow \Rightarrow f|_{\hat{I}} \nearrow \qquad (1)$$

und

$$f|_I \searrow \Rightarrow f|_{\hat{I}} \searrow \qquad (2)$$

oBdA schauen wir uns (1) an

Falls ~~I~~ $f|_{\hat{I}}$ nicht $\nearrow$ ist muss $f|_{\hat{I}}$ nach Schritt 1 $\searrow$ d.h. $\forall x, y \in \hat{I} : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

dann auch $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ $\lightning$ $f|_I \nearrow$

Somit ist $f|_{\hat{I}} \nearrow$.

Zum Widerspruch:

$f|_I \nearrow \iff \forall x,y \in I: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$\lightning$

aber nach obigem gilt

$\forall x,y \in I: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Schritt 3

Sei $I_n := [-n,n]$. Dann gilt $I_1 \subseteq I_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

- $f|_{I_1} \nearrow \vee f|_{I_1} \searrow$ (Schritt 1)
- $f|_{I_n} \nearrow \vee f|_{I_n} \searrow$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (Schritt 2)

Wollen

$\forall x,y \in \mathbb{R}: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

oder

$\forall x,y \in \mathbb{R}: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Für jedes feste $x,y \in \mathbb{R}$ finden wir I_n, sodass $x,y \in I_n$.
Damit folgt die Behauptung.

b) zz. $f \nearrow \Rightarrow f^{-1} \nearrow$ und $f \searrow \Rightarrow f^{-1} \searrow$

Aus VL: f stetig $\Rightarrow f^{-1}$ stetig, dann folgt mit (a), da f^{-1} stetig & bijektiv, dass $f^{-1} \nearrow \vee f^{-1} \searrow$

Sei $f \nearrow$ zz. $f^{-1} \nearrow$. Sei $y_1 < y_2$ dann ex. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$$

wollen $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$

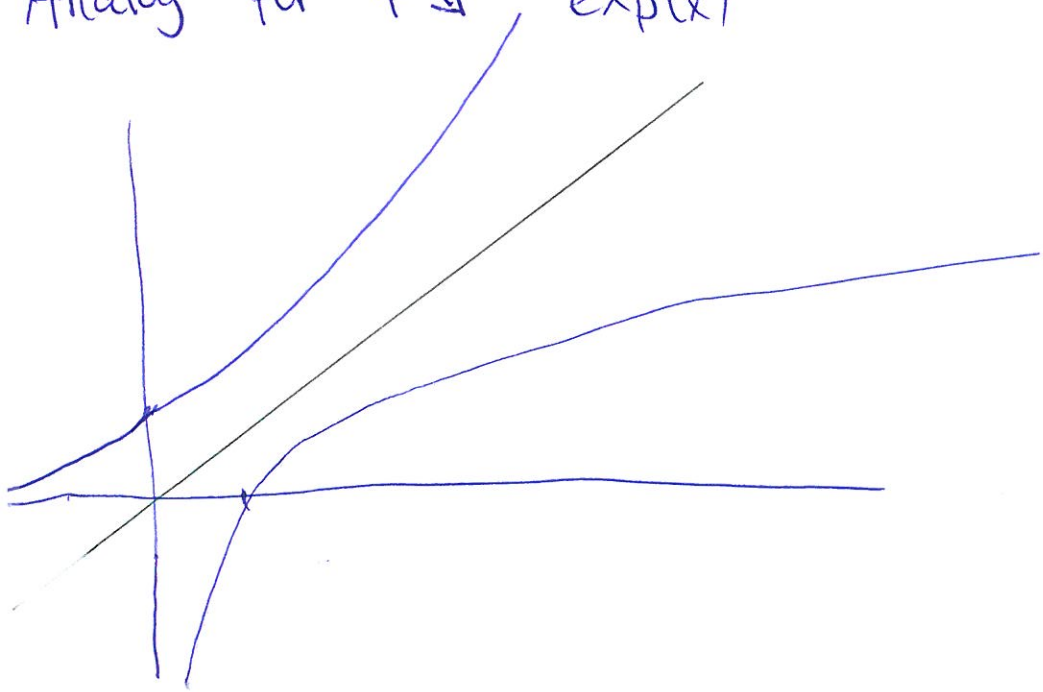
Ang. $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$

aber $f \nearrow$ und somit $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

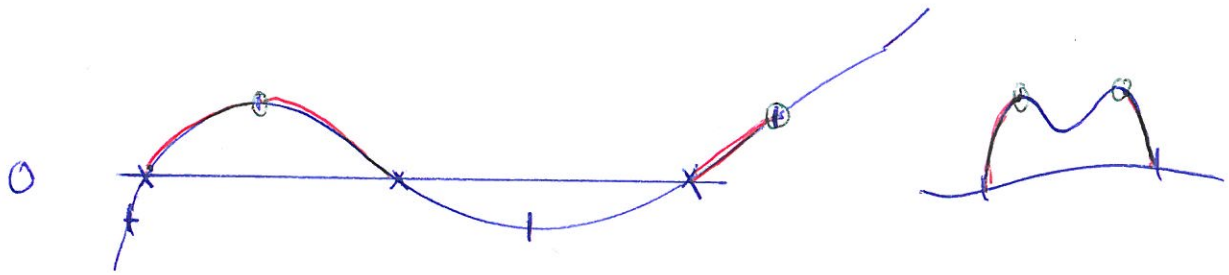
$\Leftrightarrow y_1 \geq y_2$ ↯

Somit ist $f^{-1} \nearrow$

Analog für $f \searrow$, $\exp(x)$



V 9.4



Seien $a < b$ derart, dass

$$f(a) = f(b) \quad (= 0 \quad \text{oBdA})$$

Setze $I = [a,b]$ kompakt und somit nimmt auf f auf I ein Maximum / Minimum an, d.h. $\exists\, c \in [a,b]$ mit

$$\forall_{x \in I} \; f(c) \geq f(x) \quad \vee \quad \forall_{x \in I} \; f(c) \leq f(x)$$

oBdA nehmen wir an: $\forall_{x \in I} \; f(c) \geq f(x)$

Nach dem ZWS werden auf den Intervallen

$$I_1 = [a,c] \quad \text{und} \quad I_2 = [c,d]$$

die Werte in $[f(a), f(c)] = [f(b), f(c)]$ mind. ~~genau~~ 2x angenommen außer bei $f(c)$ ist das unklar.

D.h. es muss ein $\hat{c} \in \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$f(\hat{c}) = f(c) \quad \text{und} \quad \hat{c} \neq c$$

Fall 1 ($\hat{c} < a$)

Nach dem ZWS werden dann auf $[\hat{c}, a]$ die Werte ~~[f]~~ in $[f(a), f(\hat{c})]$ mind. 1x angenommen

Also werden die Werte mind 3x angenommen

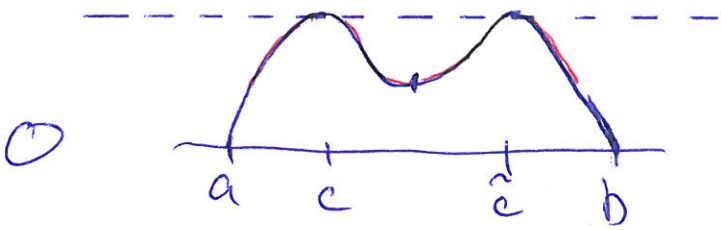
Fall 2 ($b < \hat{c}$)

Analog wie Fall 1 für das Intervall $[b, \hat{c}]$

Fall 3 ($a \leq \hat{c} \leq b$)

Wir wissen: es gilt entweder $c \leq \hat{c}$ oder $\hat{c} < c$

oBdA: $c \leq \hat{c}$. Dann gilt $[c, \hat{c}] \subseteq [a, b]$



Da $f(c) = f(\hat{c}) \geq f(x)$ für jedes $x \in [a, b]$ ist f entweder Konstant oder es ex ein $d \in (c, \hat{c})$ mit

$$f(d) < f(c) = f(\hat{c}).$$

Falls f konstant ist auf $[c, \hat{c}]$, so wird der Wert $f(c)$ unendl. oft angenommen

Ansonsten werden die Werte in $[f(d), f(c)]$ mind. 2x angenommen.

Z 9.5

Es gilt $f^3(x) = f(f(f(x))) = x$. Sei $g = f \circ f = f^2$.

Dann

$$f \circ g = f^3 = id \quad \text{und} \quad g \circ f = f^3 = id,$$

d.h. f ist bijektiv nach Blatt 3 Aufg. 5.

Nach V9.3 (a) ist f somit str. mon. wachsend oder str. mon. fallend.

Ang. f ist str. mon. fallend. Sei $x < y$, dann folgt

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow f(x) > f(y) \\ &\Rightarrow f(f(x)) < f(f(y)) \\ &\Rightarrow f(f(f(x))) > f(f(f(y))) \\ &\Leftrightarrow x > y \quad ↯ \end{aligned}$$

Also ist f str. mon. wachsend

Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Dann gilt

$$x \leq f(x) \quad \text{oder} \quad x > f(x)$$

Falls $x > f(x)$, dann folgt wegen Monotonität von f

$$x > f(x) \Rightarrow f(x) > f^2(x) \Rightarrow f^2(x) > f^3(x) = x$$

Also

$$x > f(x) > f^2(x) > f^3(x) = x \quad ↯$$

Somit muss $x \leq f(x)$ gelten.

Erneut folgt wegen Monotonie:

$$x \leq f(x) \Rightarrow f(x) \leq f^2(x) \Rightarrow f^2(x) \leq f^3(x) = x$$

Also

$$x \leq f(x) \leq f^2(x) \leq f^3(x) = x$$

Insgesamt also

$$x = f(x).$$