Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc.

Gruppenübung 1

Aufgabe 1 (Integrale | *Votieraufgabe für die Basisgruppen*)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x,$$ *ii)* $$\int x\sin(4x)\,\mathrm{d}x,$$

iii) $$\int_0^\pi e^x\sin(x)dx,$$ *iv)* $$\int \frac{\sin(2x)}{2+\sin(x)}dx.$$

Aufgabe 2 (Integrale | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $$\int_0^{\pi/3} \frac{\tan(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,\mathrm{d}x,$$ *ii)* $$\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x,$$ *iii)* $$\int_0^\pi \cos(x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3 (Integrale | *Votieraufgabe für die Standardgruppen*)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $$\int \arctan(\xi)\mathrm{d}\xi,$$ *ii)* $$\int \frac{(1+\arctan(x))^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin(x)(\cos(x))^{x^2}e^{-\frac{x^2}{\pi}}\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Die schriftliche Aufgabe.

Aufgabe 4 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Mittelwertsatz | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

a) Seien $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ mit $a<b$ und $c<d$. Seien $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $g,h:[c,d]\to[a,b]$ differenzierbar und sei $I:[c,d]\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$I(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie, dass I differenzierbar ist. Geben Sie desweiteren eine Formel für die Ableitung von I an.

Hinweis: Drücken Sie $I(x)$ durch eine Stammfunktion von f aus.

b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \int_{x^4}^{2x^4} \cos(y^2)\mathrm{d}y.$$

Aufgabe 5 (Integralabschatzung | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)
Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_4(f, x, 0)$.

b) Zeigen Sie, dass sich das Restglied abschätzen lässt als

$$\sup_{x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} |f(x) - T_4(f,x,0)| \leq \frac{27}{1280}.$$

c) Zeigen Sie, dass der Wert des Integrals

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x,$$

im Intervall $[\frac{3463}{3840}, \frac{3625}{3840}]$ liegt.

Aufgabe 6 (Substitionsregel rückwärts, Riemannsummen | *Votieraufgabe für die fortgeschrittenen Gruppen*)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$i) \quad \int (1+x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x, \qquad ii) \quad \int (1-t^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{für } |t| < 1.$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k},$$

indem Sie $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$ als die Riemannsche Summe einer geeigneten Funktion auf einem geeigneten Intervall auffassen.

Aufgabe 7 [**Schriftliche Aufgabe 4 Punkte**]

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$i) \quad \int_1^2 4x^3 \ln(x)\,\mathrm{d}x, \qquad ii) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad iii) \quad \int_a^b 5x^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

b) Sei $a > 0$ und seien $u, v\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dabei sei u eine gerade Funktion, d.h. es gilt $u(-x) = u(x)$ für alle $x \in [-a,a]$ und v eine ungerade Funktion, d.h. $v(-x) = -v(x)$ für alle $x \in [-a,a]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-a}^{a} u(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a u(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-a}^{a} v(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$