



## Gruppenübung 2

**Aufgabe 1** (Integration rationaler Funktionen I | *Votieraufgabe für die Basisgruppen*)

a) Geben Sie die Partialbruchzerlegung des folgenden rationalen Ausdrucks an:

$$\frac{1}{x^2 - 4x}$$

b) Berechnen Sie das folgende Integral mithilfe Partialbruchzerlegung.

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx.$$

**Aufgabe 2** (Integration rationaler Funktionen II | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe Partialbruchzerlegung.

$$a) \int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^2} dx, \quad b) \int \frac{5 - 5x - 6x^2 + 3x^3 + 3x^4}{(x^2 - 1)(x - 1)} dx, \quad \text{für } x > 1.$$

**Aufgabe 3** (Integration rationaler Funktionen III | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$a) \int_0^1 \frac{x^2 + x}{2x^3 + 3x^2 + 14} dx, \quad b) \int \frac{8}{(4 - x^2)(4 + x^2)} dx, \quad \text{für } x > 2.$$

**Aufgabe 4** (Uneigentliche Integrale I | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Werte.

$$i) \int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2} dx, \quad ii) \int_0^1 x \ln(x) dx.$$

b) Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz.

$$i) \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx, \quad ii) \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x\sqrt{x}} dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale.

**Aufgabe 5** (Uneigentliche Integrale II | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

- a) Sei  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton fallend und  $f(x) \geq 0$  für all  $x \in [0, \infty)$ . Außerdem sei das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} f(x) dx,$$

konvergent. Zeigen Sie, dass gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

- b) Untersuchen Sie, für welche Konstanten  $\alpha \in \mathbb{R}$  das Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx,$$

konvergiert.

**Aufgabe 6** (Flächeninhalt | *Votieraufgabe für die Standardgruppen*)

Hat die Fläche, die von den Graphen der Funktion  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$  und  $g(x) = \arctan(x)$  und der Geraden  $x = 1$  eingeschlossen wird, rechts der Geraden endlichen Inhalt? Berechnen Sie ihn gegebenenfalls.

**Aufgabe 7** (Substitution und Partialbruchzerlegung | *Votieraufgabe für die fortgeschrittenen Gruppen*)

Berechnen Sie das Integral:

$$\int \frac{1 + \sin(x)}{\sin(x)(1 + \cos(x))} dx, \quad \text{für } x \in (0, \pi).$$

**Aufgabe 8** [Schriftliche Aufgabe 4 Punkte]

- a) Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe Partialbruchzerlegung.

$$i) \quad \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2} dx, \quad ii) \quad \int \frac{3x + 3}{x^3 - 1} dx \quad \text{für } x > 1.$$

- b) Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz.

$$i) \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x} dx, \quad ii) \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x|\sin x|} dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale.