Gruppenübung 3

Aufgabe 1 (Reihendarstellung von Funktionen | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von

$$f(x) = \ln(x^2 + 2), \qquad g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

um $x_0 = 0$ durch gliedweise Integration und Differentiation geeigneter Potenzreihen. Geben Sie das größtmögliche offene Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ an, auf dem die von Ihnen gefundenen Reihen f und g tatsächlich darstellt.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n.$$

Welche Funktion stellt diese auf ihrem Konvergenzkreis dar?

Aufgabe 2 (Differentialgleichungen erster Ordnung | *Votieraufgabe für die Basisgruppen*)
Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$y' + 2xy + 2x^3 = 0.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(0) = 2$.

Aufgabe 3 (Differentialgleichungen erster Ordnung | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + \cos(x)y = \sin(x)\cos(x), \quad y(0) = 1.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

$$y' = -\sqrt{y}, \qquad y' + \frac{y}{x} = 2,$$

für $x > 0$

Aufgabe 4 (Differentialgleichungen erster Ordnung | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)
In ein Becken mit Salzwasser der Konzentration C_1 (=Salzmenge/Volumen) wird eine kleine Zelle mit Volumen V und Oberfläche F eingetaucht. Die Zelle enthält ebenfalls Salzwasser, jedoch mit geringerer Konzentration C_2. Über die salzdurchlässige Zellwand dringt nun von außen Salz in die Zelle ein. Der Salzmengenzuwachs in der Zelle kann als proportional zur Zelloberfläche, zur sich zeitlich ändernden Differenz zwischen Außen- und Innenkonzentration und zum Zeitzuwachs angenommen werden. Das Becken ist gegenüber der Zelle so groß, dass die Außenkonzentration C_1 als konstant angenommen werden kann. Beschreiben Sie den Diffusionsprozess durch eine Differentialgleichung für die Salzkonzentration $c(t)$ in der Zelle und lösen Sie diese Differentialgleichung.

Aufgabe 5 (Differentialgleichungen erster Ordnung | *Votieraufgabe für die Standardgruppen und fortgeschrittenen Gruppen*)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1,$$

durch Einsetzen des Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Welche Funktion stellt die gefundene Potenzreihe dar?

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}, \quad y(1) = 0,$$

für $x > 0$.

c) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Bernoulli-Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x} - y^2, \quad y(1) = 1,$$

für $x > 0$.

Aufgabe 6 [**Schriftliche Aufgabe 4 Punkte**]

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = xy^2, \quad y(0) = 2.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n! (2n+1)}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Taylorreihe der Exponentialfunktion.