Gruppenübung 4

Aufgabe 1 (Matrizenkalkül | *Votieraufgabe für die Basisgruppen*)

a) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie AB und BA. Schlussfolgern Sie $AB \neq BA$.

b) Geben Sie eine nicht-invertierbare Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $M^2 = 0$ und $M \neq 0$ an. Gibt es auch nicht-invertierbare Matrizen $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $M^2 \neq 0$?

Aufgabe 2 (Inverse Matrizen | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

a) Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls A^{-1}.

b) Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe a).

Aufgabe 3 (Lineare Abbildungen und Matrizen | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)
Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Basis $\mathcal{E}_3$ und der Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = (2,0,1)^T$, $b_2 = (1,0,1)^T$ und $b_3 = (0,1,2)^T$. Die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $M_L^{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3}$ und $M_L^{B,B}$.

b) Stellen Sie $L(2b_1 - 3b_3)$ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}_3$ dar.

Aufgabe 4 (Lineare Abbildungen und Matrizen | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

a) Die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die "Telefonmatrix"

$$M_L^{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Basis von Bild(L) an und berechnen Sie die Dimension von Kern(L).

b) Es bezeichne P_3 den Vektorraum der reellen Polynome $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bis zum Grad 3. Zeigen Sie, dass die Ableitung $D : P_3 \to P_3$ gegeben durch $D(p) = p'$ linear ist, und bestimmen Sie eine Matrixdarstellung von D bezüglich der Basis $\{f_k : k = 0, 1, 2, 3\}$ mit $f_k(x) = x^k, k = 0, 1, 2, 3$.

Aufgabe 5 (Dimensionsformel | *Votieraufgabe für die Standardgruppen und fortgeschrittenen Gruppen*)

a) Seien V und W endlichdimensionale Räume gleicher Dimension und $L\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   i) L ist injektiv,

   ii) L ist surjektiv,

   iii) L ist bijektiv.

b) Sei V der Vektorraum der reellen Polynome und $L\colon V \to V$ gegeben durch

$$L(p)(x) = x \cdot p(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass L linear und injektiv ist, aber nicht surjektiv.

Aufgabe 6 [Schriftliche Aufgabe (4 Punkte)]

a) Gegeben seien der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Basis $\mathcal{E}_3$ und der Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = (1, 1, 1)^T$, $b_2 = (1, 0, 1)^T$ und $b_3 = (1, -1, 0)^T$ sowie der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit der kanonischen Basis $\mathcal{E}_2$ und der Basis $C = \{c_1, c_2\}$ mit $c_1 = (2, 0)^T$ und $c_2 = (0, 1)^T$. Der Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ besitze bezüglich $\mathcal{E}_3$ die Koordinaten $(2, 1, 4)^T$. Sei $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die bezüglich der kanonischen Basen $\mathcal{E}_2$ und $\mathcal{E}_3$ durch die Matrix

$$M_L^{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung von Lx bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}_2$ und die Matrixdarstellung $M_L^{C,B}$.

b) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

   i) Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$, $L : V \to W$ eine lineare Abbildung und U ein Untervektorraum von V. Das Bild $L(U) = \{L(u) : u \in U\}$ ist ein Untervektorraum von W.

   ii) Seien $k, m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine Matrix mit $\ker(A) = \{0\}$. Sind $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig, dann sind auch $Av_1, \ldots, Av_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.