Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc.

Gruppenübung 5

Aufgabe 1 (Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)
Gegeben sei die "Telefonmatrix"

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie Rang(A) und eine Basis von Kern(A).

b) Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen $x, y \in \mathbb{R}^3$ der linearen Gleichungssysteme

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Ay = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Benutzen Sie Teilaufgabe a).

Aufgabe 2 (Projektionen | *Votieraufgabe für die Basis- und Standardgruppen*)

a) Bestimmen Sie mit dem Gramm-Schmidtschen Verfahren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, die sich aus den folgenden Basisvektoren ableitet:

$$v_1 = (-2, 2, 1)^\top, \quad v_2 = (-2, 0, 1)^\top, \quad v_3 = (3, 0, 0)^\top.$$

Sie können die Reihenfolge bestimmen, in der Sie die Vektoren benutzen.

b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $(0, 1, 1)^\top$ auf Span$\{v_1, v_2\}$.

Aufgabe 3 (Symmetrische Matrizen | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben sei die Abbildung $L\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$L(A) = A^\top + A.$$

a) Zeigen Sie, dass L linear ist.

b) Zeigen Sie, dass Bild(L) der Unterraum der symmetrischen Matrizen von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

c) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt schiefsymmetrisch falls $A^\top = -A$. Zeigen Sie, dass Kern(L) der Unterraum der schiefsymmetrischen Matrizen von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

Aufgabe 4 (Positiv definit | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass alle Diagonalelemente einer positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv sind.

b) Gilt die Umkehrung der Aussage in a) auch?

Aufgabe 5 (Rang | *Votieraufgabe für die fortgeschrittenen Gruppen*)
Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$.

a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Rang}(AB) \leq \operatorname{Rang}(A)$ gilt.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass die Spalten von AB Linearkombinationen der Spalten von A sind.

b) Beweisen Sie außerdem, dass $\operatorname{Rang}(AB) \leq \operatorname{Rang}(B)$ gilt.

   Hinweis: Sie können benutzen, dass für alle Matrizen $C \in \mathbb{R}^{m\times k}$ der Zeilenrang von C gleich dem Spaltenrang von $C^\top$ ist.

Aufgabe 6 [Schriftliche Aufgabe (4 Punkte)]
Gegeben ist die Ebene

$$E : 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

in $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von E.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung P der Orthogonalprojektion auf die Ebene E bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

c) Bestimmen Sie $\operatorname{Rang}(P)$ und eine Basis von $\operatorname{Kern}(P)$. Geben Sie außerdem die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems $Px = (1, 0, -3)^\top$ an.

d) Zeigen Sie, dass P positiv semidefinit ist.