Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll, Dr. B. de Rijk,
Nicole Gauß M.Sc.

Gruppenübung 6

Aufgabe 1 (Determinanten | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

a) Berechnen Sie $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   i) mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz,

   ii) durch Transformation in Zeilenstufenform mittels elementarer Zeilenumformungen.

b) Gegeben seien die Vektoren $x = (-2, 1, 1)^\top$ und $y = (2, 0, -2)^\top$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

   Hinweis: Bestimmen Sie einen Vektor $z \in \mathbb{R}^3$, der orthogonal zu x und y ist, und berechenen Sie das Volumen des von x, y und z aufgespannten Parallelotops.

Aufgabe 2 (Determinanten | *Votieraufgabe für die Basis- und Standardgruppen*)
Gegeben sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} -t & 0 & 5 \\ -2 & t & 1 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\det(A_t)$ und $\det(A_t^{-1})$.

b) Sei $\mathcal{E}_3$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $L_t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Matrixdarstellung $M_{L_t}^{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} = A_t$ bijektiv?

Aufgabe 3 (Spezielle Matrizen | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist die komplexe Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix},$$

   unitär?

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Beweisen Sie Ihre Antwort.

   i) U ist symmetrisch. ii) $\mathrm{Rang}(U) = n$. iii) $U\,V^T$ ist orthogonal.

   Hinweis: Die Falschheit einer Aussage kann man in vielen Fällen durch Angabe eines Gegenbeispiels beweisen.

c) Sei $\mathcal{E}_2$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Bilinearform $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit Matrixdarstellung

$$M_b^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix},$$

positiv definit ist.

Aufgabe 4 (Wahr oder falsch? | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist AB invertierbar, dann ist auch BA invertierbar.

b) Es gilt $\operatorname{Rang}(AB) = \operatorname{Rang}(BA)$.

c) Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

d) Ist A eine Projektion, d.h. es gilt $A^2 = A$, dann ist entweder A nicht invertierbar oder A die Einheitsmatrix.

e) Ist A schiefsymmetrisch, d.h. es gilt $A = -A^\top$, dann ist A nicht invertierbar oder n gerade.

Aufgabe 5 (Determinanten | *Votieraufgabe für die fortgeschrittenen Gruppen*)
Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Beweisen Sie, dass die Blockmatrix

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

Determinante $\det(M) = \det(A)\det(C)$ hat.

Hinweis: Der Determinantenmultiplikationssatz kann hilfreich sein.

Aufgabe 6 [Schriftliche Aufgabe (4 Punkte)]
Gegeben ist die reelle Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix M_α in Abhängigkeit von α.

b) Bestimmen Sie $\operatorname{Rang}(M_\alpha^2)$ in Abhängigkeit von α.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe a).

c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem $M_\alpha^2 x = 0$,

i) nicht-triviale Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$?

ii) zwei linear unäbhangige Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$?

iii) genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$?

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b).