Gruppenübung 8

Aufgabe 1 (Quadriken | *Votieraufgabe für die Basis- und Standardgruppen*)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Eigenwerte von A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor an.

b) Geben Sie eine orthogonale Matrix S an, so dass $D = S^\top AS$ eine Diagonalmatrix ist.

c) Bestimmen Sie die geometrische Gestalt der Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^\top Ax = 1\}$ und skizzieren Sie Q.

   Hinweis: Benutzen Sie für die Skizze, dass S eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ beschreibt.

Aufgabe 2 (Quadriken | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)
Sei die quadratische Form $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(x) = 3x_1^2 - 3x_2^2 - 8x_1x_2 + 22x_1 + 4x_2 + 7.$$

a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $q(x) = x^\top Ax + b^\top x + c$.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $q(Sy) = y^\top \Lambda y + \tilde{b}^\top y + c$, wobei $\Lambda \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Diagonalmatrix und $\tilde{b} \in \mathbb{R}^2$ ist.

c) Bestimmen Sie die geometrische Gestalt der Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : q(x) = 0\}$ anhand der Normalform $\{y \in \mathbb{R}^2 : y^\top \Lambda y + \tilde{b}^\top y + c = 0\}$.

Aufgabe 3 (Alte Scheinklausuraufgabe | *Votieraufgabe für die Basisgruppen*)
Die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist durch die Matrixdarstellung

$$M_L^{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{E}_2$ des $\mathbb{R}^2$ gegeben. Sei $B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\}$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $M_{Id_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{E}_2,B}$ und $M_{Id_{\mathbb{R}^2}}^{B,\mathcal{E}_2}$.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $M_L^{B,B}$ von L bzgl. B.

Aufgabe 4 (Kombination von Analysis und linearer Algebra | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)
Sei V_0 die Menge aller stetigen Funktionen $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Gegeben sei die Abbildung $\|\cdot\|\colon V_0 \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(V_0, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist.

b) Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für alle $f \in V_0$ gilt

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} x f(x) \mathrm{d}x \right| \leq C\|f\|.$$

c) Gegeben seien die Funktionen $f_1, f_2, g \in V_0$ mit $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \sin(2x)$ und $g(x) = x$. Sei $U = \mathrm{Span}\{f_1, f_2\}$. Bestimmen Sie die Bestapproximation f von g in U, d.h. bestimmen Sie $f \in U$ mit

$$\|g - f\| = \min\{\|g - h\|\colon h \in U\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie eine orthogonale Projektion.

Aufgabe 5 (Kombination von Analysis und linearer Algebra | *Votieraufgabe für die Standardgruppen und fortgeschrittenen Gruppen*)
Sei V_∞ der Vektorraum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Gegeben sei die lineare Abbildung $T\colon V_\infty \to V_\infty$ mit $T(f) = -f''$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_1, f_2 \in V_\infty$ mit $f_1(x) = \sin(x)$ und $f_2(x) = \sin(2x)$ Eigenvektoren von T sind.

b) Sei $U = \mathrm{Span}\{f_1, f_2\}$. Zeigen Sie

   i) mithilfe partieller Integration,

   ii) mithilfe der Darstellungsmatrix M_b^B, wobei $B = \{f_1, f_2\}$ ist,

   dass die Bilinearform $b\colon U \times U \to \mathbb{R}$ mit

$$b(f, g) = -\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g''(x) \mathrm{d}x,$$

   ein Skalarprodukt auf U definiert.

c) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von b bzgl. der Basis $B' = \{f_1, g\}$, wobei $g \in U$ durch $g(x) = 2\sin(\frac{3}{2}x)\cos(\frac{1}{2}x)$ definiert ist.

Aufgabe 6 (Kombination von Analysis und linearer Algebra | *Votieraufgabe für die fortgeschrittenen Gruppen*)
Sei U wie in Aufgabe 4. Für $g \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei die Differentialgleichung

$$f'' + \lambda f = g, \tag{1}$$

gegeben.

a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es in U eine eindeutige Lösung f von (1)?

b) Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass (1) entweder keine oder keine eindeutige Lösung $f \in U$ hat. Zeigen Sie, dass (1) genau dann Lösungen $f \in U$ hast, wenn für alle Lösungen $h \in U$ der homogenen Gleichung $h'' + \lambda h = 0$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)g(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie Korollar 16.11.

Aufgabe 7 [Schriftliche Aufgabe (4 Punkte)]
Bestimmen Sie die Normalform der folgenden Quadrik

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + \sqrt{2}x_2 + 2x_3 + \tfrac{1}{8} = 0 \right\},$$

das heißt, bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, einen Vektor $\tilde{b} \in \mathbb{R}^3$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $Q = \{Sy \in \mathbb{R}^3 : y^\top \Lambda y + \tilde{b}^\top y + c = 0\}$. Bestimmen Sie außerdem die geometrische Gestalt der Quadrik.

Hinweis: Wenden Sie das gleiche Verfahren wie in Aufgabe 2 an.