Gruppenübung 9

Aufgabe 1 (Gradienten, Richtungsableitung | *Votieraufgabe für die Basis- und Standardgruppen*)

a) Bestimmen Sie für die Funktion $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$q(x, y, z) = \arctan(\cos(x^2 y)) + e^z \cosh(x + y)$$

den Gradienten.

b) Bestimmen Sie die Richtung und den Betrag des steilsten Anstiegs von q im Ursprung.

c) Bestimmen Sie für die Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y) = x^2 e^y - \sin(x)$$

die Richtungsableitung im Punkt $(0, 1)$ in Richtung des Vektors $v = \frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 2 (Jacobimatrix, totale Differenzierbarkeit, Tangentialebene | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

a) Bestimmen Sie für die Funktionen $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils die Jacobimatrix.

i) $h(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2z^3e^{xy^2z^3} \\ x^2e^y - \sin x \end{pmatrix}$, ii) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^5 + y^4 + 6.$

b) Überprüfen Sie die Funktion f auf totale Differenzierbarkeit und geben Sie die Ableitung f' an.

c) Bestimmen Sie die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(1, 1, f(1, 1))$.

Aufgabe 3 (Richtungsableitung | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)
Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei in (x_0, y_0) total differenzierbar und für $u = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ gelte $\partial_u f(x_0, y_0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ bzw. $\partial_v f(x_0, y_0) = \sqrt{2}$.

a) Bestimmen Sie $\partial_w f(x_0, y_0)$ für $w = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Bestimmen Sie die Richtung und den Betrag des steilsten Anstiegs von f im Punkt (x_0, y_0).

Aufgabe 4 (Kurvenlänge | *Votieraufgabe für die Basisgruppen*)
Sei $T > 0$. Bestimmen Sie die Länge der logarithmischen Spirale $c\colon [0,T] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$c(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (Parametrisierung, Kurvenlänge | *Votieraufgabe für die Standardgruppen und fortgeschrittenen Gruppen*)

a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$, mit $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, für die Schnittmenge des Kugelausschnitts $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \wedge x, y \geq 0\}$ und des elliptischen Zylinders $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + z^2 = 1\}$,

   i) wobei Sie den Zylinder mithilfe von Sinus und Kosinus parametrisieren;

   ii) wobei Sie die Gleichung des Zylinders nach x auflösen.

b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve γ.

Aufgabe 6 (Stetigkeit und Ableitungen erster Ordnung | *Votieraufgabe für die fortgeschrittenen Gruppen*)
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Punkt $(0,0)$ unstetig ist.

   Hinweis: Betrachten Sie f längs einer geeigneten Ursprungsgerade.

b) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f im Punkt $(0,0)$ trotzdem existieren.

c) Ist dasselbe möglich für eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. ist es möglich das g in 0 unstetig ist, aber $g'(0)$ trotzdem existiert?

Aufgabe 7 [Schriftliche Aufgabe (4 Punkte)]

a) Gegeben sei die Funktion $c\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$ mit $c(x,y) = 4 \ln \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.

   i) Berechnen Sie für c die partiellen Ableitungen erster Ordnung und die Jacobimatrix.

   ii) Überprüfen Sie c auf totale Differenzierbarkeit in $(-1,2)$.

   iii) Berechnen Sie die Richtungsableitung von c in $(-1,2)$ in Richtung des Vektors $v = \frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Bestimmen Sie die Länge der durch $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$$

   parametrisierten Kurve.