Gruppenübung 10

Aufgabe 1 (Hesse-Matrix | *Votieraufgabe für die Standard- und Basisgruppen*)
Bestimmen Sie für die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jeweils die Hesse-Matrix.

$$a) \quad f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^5 + y^4 + 6, \qquad b) \quad g(x,y,z) = xyz\sin(x+y+z).$$

Aufgabe 2 (Mehrdimensionale Kettenregel | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)
Die Funktionen $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch

$$\psi(x,y,z) = 1 - x^2 - y^2 + 2z, \qquad \phi(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y \\ xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erklärt durch $f(x,y) = \psi(\phi(x^3 - 2y^2, 2x + y))$.

a) Berechnen Sie $\nabla f(1,1)$.

b) Bestimmen Sie die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(1,1,f(1,1))$.

Aufgabe 3 (Mehrdimensionale Kettenregel | *Votieraufgabe für die fortgeschrittenen Gruppen*)
Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Drücken Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung für die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad g(x,y) = f(x^2y, x + 2y)$$

durch jene von f aus.

Aufgabe 4 (Mehrdimensionaler Satz von Taylor | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1 - x_2}\cos(x_1)\sin(x_2).$$

Bestimmen Sie die mehrdimensionalen Taylorpolynome

$$T_i(f, x, x_0) = \sum_{|\alpha| \le i} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha$$

für $i = 1, 2$, $x \in \mathbb{R}^2$ und $x_0 = (0,0)$ und geben Sie eine obere Schranke für den Betrag des Restglieds

$$R_1(f, x, x_0) = f(x) - T_1(f, x, x_0)$$

für $|x| \le 0.1$ an.

b) Bestimmen Sie die mehrdimensionale Taylorreihe von g mit

$$g(x,y,z) = \frac{yz^3}{1-x^2z}$$

um den Entwicklungspunkt $(0,0,0)$ mithilfe einer bekannten eindimensionalen Reihe.

Hinweis: Es darf verwendet werden, dass auch mehrdimensionale Potenzreihendarstellungen von Funktionen um einen festen Entwicklungspunkt eindeutig sind.

Aufgabe 5 (Laplacegleichung und Wellengleichung | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Laplacegleichung ist gegeben durch

$$\Delta q = 0,$$

wobei $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ der Laplace-Operator ist. Bestimmen Sie für $n = 1$ und $n = 2$ alle quadratischen Formen $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die die Laplacegleichung lösen.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Wellengleichung ist gegeben durch

$$\partial_t^2 \omega = c^2 \Delta \omega,$$

wobei $\omega\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Seien $\phi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $\omega\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\omega(x,t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct)$ eine Lösung der Wellengleichung für $n = 1$ ist.

Aufgabe 6 (Divergenz und Rotation | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

a) Sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 & -yz^2 & zx^2 \end{pmatrix}^\top$. Bestimmen Sie $\operatorname{div}(f)$ und $\operatorname{rot}(f)$.

Hinweis: Die Definitionen von Divergenz und Rotation finden Sie auf dem Votragsübungsblatt 10.

b) Sei $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\text{i) } \operatorname{div}(\nabla\phi) = \Delta\phi, \qquad \text{ii) } \operatorname{rot}(\nabla\phi) = 0.$$

Aufgabe 7 [Schriftliche Aufgabe (4 Punkte)]

a) Die Funktionen f und g sind gegeben durch

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad g(x,y) = \begin{pmatrix} 2\arctan(\frac{y}{x}) \\ 2\ln\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie für die Funktion $h = f \circ g$ den maximalen Definitionsbereich D sowie, mithilfe der Kettenregel, die Jacobi-Matrix.

b) Sei $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y,z) = (1-z)e^{x-y^2}$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von h zum Entwicklungspunkt $(0,0,0)$,

i) indem Sie Gradienten und Hesse-Matrix bestimmen;

ii) indem Sie die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion benutzen.