



Gruppenübung 12

Aufgabe 1 (Satz über implizite Funktionen | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

Gegeben ist die Kurve

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - xy + y^2 = 3\}.$$

- Zeigen Sie, dass $(1, 2) \in K$.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K im Punkt $(1, 2)$.
- Zeigen Sie, dass es ein Intervall $U \subset \mathbb{R}$ mit $1 \in U$ und eine differenzierbare Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\{(x, f(x)) : x \in U\} \subset K.$$

- Zeigen Sie, dass es außerdem ein Intervall $V \subset \mathbb{R}$ mit $2 \in V$ und eine differenzierbare Funktion $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\{(g(y), y) : y \in V\} \subset K.$$

Aufgabe 2 (Satz über implizite Funktionen | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned}x^2y^2 + zu + yv^2 &= 3 \\ y + 2xv - u^2v^2 &= 2\end{aligned}$$

in der Nähe von $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$ nach (u, v) aufgelöst werden kann und bestimmen Sie $\frac{\partial v}{\partial y}$ im Punkt $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Aufgabe 3 (Extrema mit Nebenbedingungen | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = e^y(y^2 - 2x^2).$$

- Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 2x^2 + y^2 = 6$.
- Bestimmen Sie Maximum und Minimum von f auf der Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 6\}.$$

Aufgabe 4 (Extrema mit Nebenbedingungen | *Votieraufgabe für alle Gruppen*)

Gegeben sei die Funktion $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = x + y + z.$$

Untersuchen Sie, ob die Funktion h unter den beiden Nebenbedingungen $x^2 - y^2 = 1$ und $2x + z = 1$ Extremstellen besitzt.