



Vortragsübung 1

Aufgabe 1 *Integration*

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\begin{array}{ll} a) & \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos(3x) dx, \\ b) & \int x^2 \cos(x) dx, \\ c) & \int x \cos(x^2 + 1) dx, \\ d) & \int_0^2 \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx, \\ e) & \int_a^b \sinh(x) \cos(x) dx, \\ f) & \int \sin(2x)e^{\sin(x)} dx. \end{array}$$

Aufgabe 2 *Substitutionsregel rückwärts*

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$a) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{für } |x| < 1, \quad b) \int \sqrt{x^2-1} dx \quad \text{für } x \geq 1.$$

Aufgabe 3 *Mittelwertsatz*

Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\int_a^b f(x) dx = 0$ (wobei $a < b$).

- Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle in $[a, b]$ besitzt.
- Bleibt dieser Schluß richtig, wenn f zwar Riemann-integrierbar, aber unstetig ist?

Aufgabe 4 *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

Sei $D = (-a, a)$ mit $a > 0$. Wir nennen eine beliebige Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ *gerade*, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in D$ gilt. Wir nennen f *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt. Im Folgenden sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

- Ist f ungerade, so ist f' gerade, und alle Stammfunktionen von f sind gerade.
- Ist f gerade, so ist f' ungerade, und f besitzt genau eine ungerade Stammfunktion.

Aufgabe 5 *Integralabschätzung*

Zeigen Sie

$$1 - 2\varepsilon \leq \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 + \varepsilon \sin \left(x \arctan \left(\sqrt{\ln(2+x^4)} \right) \right) \right) dx \leq 1 + 2\varepsilon.$$