Vortragsübung 2

Aufgabe 1 *Partialbruchzerlegung*

a) Wie lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung der folgenden rationalen Ausdrücke in x? Eine Bestimmung der Koeffizienten ist nicht verlangt.

$$i)\quad \frac{1}{x^4-16}, \qquad ii)\quad \frac{x^3-x}{x^2-4x+4}, \qquad iii)\quad \frac{x^4-2x^3+x-1}{x^2(x-1)^3}.$$

b) Die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{5x^3+3x^2+7x-6}{x^4+2x^3+5x^2+8x+4}$$

hat bei -1 eine doppelte und bei $2i$ eine einfache Polstelle.
Berechnen Sie das Integral

$$\int r(x)\mathrm{d}x \quad \text{für } x > -1$$

mithilfe der Partialbruchzerlegung.

c) Berechnen Sie das Integral $\int \frac{1}{2e^x+3}\mathrm{d}x$.
Hinweis: Mit Hilfe geeigneter Substitutionen erhält man Integrale rationaler Funktionen.

Aufgabe 2 *Uneigentliche Integrale*

a) Entscheiden Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren. Geben Sie im Falle der Existenz ihren Wert an.

$$i)\quad \int_1^\infty xe^{-x}\mathrm{d}x, \qquad ii)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\mathrm{d}x.$$

b) Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz.

$$i)\quad \int_3^\infty \frac{\cos(3x)}{x^3}\mathrm{d}x, \qquad ii)\quad \int_0^9 \frac{e^x}{x^{3/2}}\mathrm{d}x, \qquad iii)\quad \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^{5/4}}\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale.

c) Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ke^{-k}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 3 *Beweisaufgabe*
Zeigen Sie: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\int_a^b |f(x)| dx = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in [a,b] : f(x) = 0.$$

Aufgabe 4 *Flächeninhalt*
Bestimmen Sie den Inhalt der von der Funktion $f(x) = |\sin(2x)|e^{-x}$ und der positiven x-Achse eingeschlossenen Fläche.