Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll,
Dr. B. de Rijk, Nicole Gauß M.Sc.

Vortragsübung 5

Aufgabe 1 *Rang, Dimensionsformel*
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1+\alpha & -1 \\ 6 & 0 & -2 & \alpha^2 - 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Für welche Werte von α hat A den Rang $2, 3$ bzw. 4?

b) Welche Dimension hat der Kern der linearen Abbildung $x \mapsto Ax$, von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}^4$ für $\alpha = -1$?

c) Für welche Werte von α ist A invertierbar?

d) Für welche Werte von α hat das LGS $Ax = 0$ zwei linear unabhängige Lösungen?

Aufgabe 2 *Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme*
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie $\operatorname{Rang}(A)$ und eine Basis von $\operatorname{Kern}(A)$.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x \in \mathbb{R}^5$ des linearen Gleichungssystems

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Benutzen Sie Teilaufgabe a).

Aufgabe 3 *Positiv definit*

a) Ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ positiv definit?

b) Gibt es nicht invertierbare positiv definite Matrizen? Zeigen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 4 *Projektionen*
Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$. W sei der Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der von den Vektoren v_1, v_2, v_3 aufgespannt wird.

a) Geben Sie eine Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von W an.

b) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion des Vektors x auf W.

c) Geben Sie die Komponenten des Vektors x in Richtung der Vektoren b_1, b_2, b_3 an.

d) Schreiben Sie den Vektor x als eine Summe $x = u + v$, wobei u senkrecht auf W steht und v in W liegt.

Aufgabe 5 *Projektionen II*
Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, mit $n \in \mathbb{N}$, eine Projektion, d.h. es gilt $P^2 = P$.

a) Zeigen Sie, dass $E_n - P$ auch eine Projektion ist.

b) Zeigen Sie, dass gilt $\text{Kern}(P) = \text{Bild}(E_n - P)$ und $\text{Bild}(P) = \text{Kern}(E_n - P)$.