Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll,
Dr. B. de Rijk, Nicole Gauß M.Sc.

Vortragsübung 6

Aufgabe 1 *Determinanten*
Gegeben seien die Matrizen

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & 1 \\ -a & a-1 & 4 & -1 \\ 2a & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie $\det(A_a)$, $\det(B)$, und $\det(C)$.

b) Für welche Werte von a ist A_a invertierbar?

c) Berechnen Sie $\det(2A_a^4 A_a^\top A_a^{-3})$ für $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

d) Ist die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls D^{-1}.

e) Bestimmen Sie das Volumen des Parallelotops, welches von den Vektoren $(1,2,3)^\top$, $(1,-1,0)^\top$ und $(1,1,-1)^\top$ aufgespannt wird.

f) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ besitzt das folgende lineare Gleichungssystem nicht-triviale Lösungen?

$$\begin{aligned} (5-t)x_1 \qquad\qquad &= 0 \\ 2x_1 + \ x_2 + tx_3 &= 0 \\ 3x_1 + tx_2 - \ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 *Matrixdarstellung*
Gegeben sei die lineare Abbildung $A\colon V \to V$, wobei V ein Vektorraum ist, für den zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ gegeben seien. Man zeige, dass die darstellenden Matrizen $M_A^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ und $M_A^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}$ die gleiche Determinante haben.

Aufgabe 3 *Cramersche Regel*

a) Für die $n \times n$-Matrix A, sei durch $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem gegeben, mit $x, b \in \mathbb{R}^n$. Weiter sei vorausgesetzt, dass A invertierbar ist. Beweisen Sie die Cramersche Regel, die besagt, dass die i-te Komponente des Lösungsvektors durch

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

gegeben ist, wobei A_i die Matrix ist, die man erhält, wenn man in der Matrix A die i-te Spalte durch den Vektor b ersetzt.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$