Vortragsübung 7

Aufgabe 1 *Eigenwerte und Eigenvektoren, Diagonalisierung*

a) Bestimmen Sie für die folgende Matrix M Eigenwerte und Eigenvektoren und die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie eine Matrix S_1 an, so dass $S_1^{-1} M S_1$ eine Diagonalmatrix ist.

c) Geben Sie eine orthogonale Matrix S_2 an, so dass $S_2^\top M S_2$ eine Diagonalmatrix ist.

d) Berechnen Sie M^{-1} unter Verwendung der Teilaufgabe c).

Aufgabe 2 *ähnliche Matrizen*
Im Folgenden sind jeweils zwei Matrizen A und B gegeben. Begründen Sie möglichst einfach, warum stets A nicht ähnlich zu B ist.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 *Beweisaufgabe*

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass A genau dann orthogonal ist, wenn $B' = \{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass eine Matrix A genau dann symmetrisch ist, wenn A orthogonal diagonalisierbar ist.
Definition: Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *orthogonal diagonalisierbar*, wenn eine orthogonale Matrix S existiert, so dass $S^\top M S$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4 *Spezielle Matrizen*

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Eigenwerten $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = -1$ und zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der dritte Eigenwert der Matrix A ist $\nu_3 = 0$. Berechnen Sie folgendes Produkt:

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$