Vortragsübung 8

Aufgabe 1 *Wahr oder falsch?*
Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie eine kurze Begründung an.

a) $0 \in \mathbb{K}$ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn $\det(A) = 0$.

b) $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(A - \lambda E_n) \neq 0$.

c) Die Summe der algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von A ist gleich n.

d) Die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von A ist gleich n.

e) Der Nullvektor $0 \in \mathbb{K}^n$ ist ein Eigenvektor von A.

f) Zwei verschiedene Eigenvektoren von A sind linear unabhängig.

g) Zwei Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert von A sind linear abhängig.

h) Zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A sind linear unabhängig.

Aufgabe 2 *Quadriken*
Gegeben seien die folgenden Quadriken

1.) $Q_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, q_1(x) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 6 = 0 \right\}$,

2.) $Q_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, q_2(x) = 4x_1^2 + 8x_1 - x_2 = 0 \right\}$.

a) Bestimmen Sie jeweils eine symmetrische Matrix $A_k \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, einen Vektor $b_k \in \mathbb{R}^2$ und eine Konstante $c_k \in \mathbb{R}$, so dass $q_k(x) = x^\top A_k x + b_k^\top x + c_k$.

b) Bestimmen Siejeweils eine orthogonale Matrix $S_k \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $q_k(S_k y) = y^\top \Lambda_k y + \tilde{b_k}^\top y + c_k$, wobei $\Lambda_k \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Diagonalmatrix und $\tilde{b_k} \in \mathbb{R}^2$ ist.

c) Bestimmen Sie jeweils die geometrische Form der Quadrik Q_k.

Aufgabe 3 *Quadriken*
Für $k \in \mathbb{R}$ sei die folgende Familie von Quadriken gegeben:

$$Q_k := \{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid q_k(x) := x_1^2 + kx_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 + 4x_1 + 1 = 0\}.$$

a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $A_k \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $q_k(x) = x^\top A_k x + b^\top x + c$.

b) Bestimmen Sie für $k = -1,\ 2,\ 5$ jeweils eine orthogonale Matrix $S_k \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $q_k(S_k y) = y^\top \Lambda_k y + \tilde{b_k}^\top y + c$, wobei $\Lambda_k \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Diagonalmatrix und $\tilde{b_k} \in \mathbb{R}^3$ ist.

c) Bestimmen Sie für $k = -1,\ 2,\ 5$ jeweils die geometrische Form der Quadrik Q_k.