Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll,
Dr. B. de Rijk, Nicole Gauß M.Sc.

Vortragsübung 9

Aufgabe 1 *Kurvenlänge*
Ein Drahtseil mit konstanter Massendichte wird an den zwei Drahtseilenden an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ fixiert. Sein Durchhang in einem homogenen Gravitationsfeld wird durch eine Kettenlinie beschrieben:

$$f_a(x) = a\cosh(\frac{x}{a}), \quad \text{wobei}\, a \neq 0.$$

a) Geben Sie eine reguläre Parametrisierung $\gamma(x)$ für das Drahtseil an.

b) Sei $I = [-2, 2]$. Bestimmen Sie die Tangente an die Kurve $\gamma(I)$ im Punkt $\gamma(0)$, in Abhängigkeit von a.

c) Berechnen Sie die Länge des Drahtseils in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 2 *Jacobi-Matrix, total differenzierbar, Richtungsableitung, Tangentialebene*
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2.$$

a) Bestimmen Sie zu f die partiellen Ableitungen erster Ordnung und geben Sie den Gradienten und die Jacobi-Matrix von f an.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f auf $\mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist und geben Sie die Ableitung f' an.

c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1, 2)$ in Richung des Vektors $v = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

d) Bestimmen Sie die Tangentialebene an den Graphen $G_f = \{x_1, x_2, f(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ im Punkt $(1, 1, f(1, 1))$.

Aufgabe 3 *Richtungsableitung*
Es seien $v_1 = (1, 1, -1)^\top$, $v_2 = (0, 1, 1)^\top$, $v_3 = (-1, 0, 1)^\top$. Weiter sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ im Punkt (x_0, y_0, z_0) differenzierbar. Bestimmen Sie $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ mit Hilfe der Richtungsableitungen

$$\partial_{v_1} h(x_0, y_0, z_0) = 2, \quad \partial_{v_2} h(x_0, y_0, z_0) = 1, \quad \partial_{v_3} h(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Aufgabe 4 *Jacobi-Matrix, total differenzierbar*
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (y-z)^2 \\ xz \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie zu f die partiellen Ableitungen erster Ordnung und geben Sie die Jacobi-Matrix von f an.

b Zeigen Sie, dass die Funktion f auf $\mathbb{R}^3$ total differenzierbar ist und geben Sie die Ableitung f' an.