Vortragsübung 10

Aufgabe 1 *Mehrdimensionale Kettenregel*
Seien $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $h(x,y) = (e^{2x} + y, \cos(xy))$, $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ mit $g(t) = (\ln(t), -t^2)$ und $f = h \circ g$.

a) Berechnen Sie f' direkt.

b) Berechnen Sie f' mithilfe der mehrdimensionalen Kettenregel.

Aufgabe 2 *Mehrdimensionaler Satz von Taylor*
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = \sin(x_2 - \cos(x_1))$.

a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f.

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, x_0)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

i) mithilfe der Formel

$$T_i(f, x, x_0) = \sum_{|\alpha| \le i} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

ii) mithilfe des Gradienten und der Hesse-Matrix

c) Geben Sie eine obere Schranke für den Betrag des Restglieds

$$R_1(f, x, x_0) = f(x) - T_1(f, x, x_0)$$

für $x \in [-0.1, 0.1] \times [0.8, 1.2]$ an.

d) Bestimmen Sie die Taylorreihe von g mit

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{2 + x_2 x_1^2}$$

um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$ mit Hilfe einer bekannten eindimensionalen Reihe.

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass auch mehrdimensionale Potenzreihendarstellungen von Funktionen um einen festen Entwicklungspunkt eindeutig sind.

Aufgabe 3 *Divergenz, Rotation*
Definition: Für ein Vektorfeld, d.h. eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definieren wir die *Divergenz*

$$\mathrm{div} f(x^*) = \nabla \cdot f(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^*)$$

an der Stelle $x^* \in \mathbb{R}^n$.
Definition: Für ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieren wir die *Rotation*

$$\mathrm{rot} f(x^*) = \nabla \times f(x^*) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^T \Bigg|_{x=x^*}$$

an der Stelle $x^* \in \mathbb{R}^3$.

a) Sei das Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(x,y,z) = \frac{1}{1+z^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$.

   Bestimmen Sie $\mathrm{div}(F)$ und $\mathrm{rot}(F)$.

b) Sei $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie die folgende Identität:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(A)) = 0.$$

Aufgabe 4 *Wärmeleitungsgleichung*
Die Wärmeleitungsgleichung ist gegeben durch

$$\partial_t f = \Delta f,$$

wobei $f(t,x) \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$ der Laplace-Operator ist.
Zeigen Sie für $n = 1$, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.