Apl. Prof. Dr. W.-P. Düll,
Dr. B. de Rijk, Nicole Gauß M.Sc.

Vortragsübung 11

Aufgabe 1 *Hurwitz-Kriterium für* 2×2 *Matrizen*

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Ist $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ein kritischer Punkt von f und $\det(f''(x_0)) < 0$, dann ist x_0 ein Sattelpunkt der Funktion f.

b) Wenden Sie das Kriterium auf die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto x^2 - y^2 + 5,$$

an.

Aufgabe 2 *Extrema I*
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x - 21y$.

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

c) Bestimmen Sie den Typ der kritischen Punkte (lokales Maximum, lokales Minimum, Sattelpunkt).

Aufgabe 3 *Extrema II*
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 4xy^2 - x^3 - 8y^2 + 8xy + 6x^2 - 16y - 8x.$$

a) Bestimmen Sie die einzige kritische Stelle $z = (x_0, y_0)$ von f.

b) Stellen Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung von f um z fest, ob in z ein lokales Maximum/Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 4 *Topologie*

a) Welche der folgenden Teilmengen sind offen, welche sind abgeschlossen, und welche sind beschränkt? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

i) $[0,\infty)$ in $\mathbb{R}$ ii) $\{(x,0)\colon x \in (0,1)\}$ in $\mathbb{R}^2$

b) Sei $\mathcal{S} = \{U \subseteq \mathbb{R}^n\colon U \text{ ist offen in } \mathbb{R}^n\}$ und sei $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ beliebig. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{V\in\mathcal{S}'} V$ eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ ist.

c) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $U \subset \mathbb{R}$ offen, so ist auch

$$f^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R}\colon f(x) \in U\}$$

eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.