Vortragsübung 12

Aufgabe 1 *Satz über implizite Funktionen*
Wir betrachten die Kurve

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^3 - 2xy = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Punkt $(1, 1)$ auf der Kurve C liegt.

b) Zeigen Sie dann, dass es Intervalle U um $x_* = 1$ und V um $y_* = 1$ und eine differenzierbare Funktion $f : U \to V$ gibt mit $f(1) = 1$ und

$$\{(x, f(x)) \,:\, x \in U\} \subset C.$$

c) Berechnen Sie $f'(1)$ und $f''(1)$.

d) Folgt mit dem Satz über implizite Funktionen auch die Existenz von Intervallen $\tilde{V}$ um $y_* = 1$ und $\tilde{U}$ um $x_* = 1$ und einer differenzierbaren Funktion $h : \tilde{V} \to \tilde{U}$ mit

$$\{(h(y), y) \,:\, y \in \tilde{V}\} \subset C\,?$$

Aufgabe 2 *Zwei implizite Funktionen*
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^{y^2 \sin(x)} + x^6 y^2 - 3yt - 1 &= 0, \\ x^2 + y^2 t - 1 &= 0. \end{aligned}$$

mit einer Lösung $(t_0, x_0, y_0) = (1, 0, -1)$. Lässt sich das System in einer Umgebung des Punktes lokal nach x und y auflösen?

Aufgabe 3 *Extrema auf beschränkten und abgeschlossenen Mengen*
Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

auf der Kreisscheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 4 *Extrema unter zwei Nebenbedingungen*
Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x, y, z) = xy + 2z$$

auf dem Kreis, der sich als Schnittlinie der Ebene $x+y+z = 0$ und der Kugel $x^2+y^2+z^2 = 24$ ergibt.