A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

14. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 48. *Diagonalisierbarkeit*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Welche der Matrizen sind komplex diagonalisierbar? Welche sind reell diagonalisierbar?

Aufgabe P 49. *Verallgemeinerte Fibonacci-Folge*

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$f_1 := 2\,, \quad f_n := 2f_{n-1} + 5 \text{ für } n \geqq 2\,.$$

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A so, dass für alle $n \geqq 1$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$A\begin{pmatrix} f_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie eine Matrix T so, dass $T^{-1}AT$ Diagonalform besitzt.
Bestimmen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$.

(c) Bestimmen Sie mit **(a)** und **(b)** eine geschlossene Formel (ohne Rekursion) für f_n.

Aufgabe P 50. *Quadrik Typen*

Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die Quadrik

$$Q := \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + cx_3^2 + 4cx_2x_3 + 2c(c-1)x_3 + c(c-1) = 0 \right\}$$

eine kegelige Quadrik, eine Mittelpunktsquadrik oder eine parabolische Quadrik?

Aufgabe P 51. *Modellierung mit Quadriken*

Ein Tunnel in Form eines parabolischen Zylinders überspannt eine (unendlich lange) Straße in der x_1x_2-Ebene. Die Tunnelwand ist gegeben durch den Schnitt von $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geqq 0\}$ mit

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x_1^2 + 16x_2^2 - 16x_1x_2 + 10x_3 = 30 \right\}.$$

(a) In welche Richtung verläuft die Straße? (Das heißt, geben Sie einen Vektor an, der parallel zur Straße verläuft)

(b) Wie hoch ist der Tunnel?

(c) Wie breit ist der Tunnel?

Aufgabe P 52. *Symmetrische Matrizen*

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Finden Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

(c) Ist A positiv definit, negativ definit oder indefinit?

Zu diesem Blatt gibt es keine Online-Aufgabe.

Hausübungen:

Ihre Bearbeitung der Hausaufgaben zu Blatt 14 wird im Sommersemester als Leistung zu den Übungen zur HM2 verlangt.
Die Abgabe erfolgt via ILIAS in dann neu eingeteilten Übungsgruppen.

Aufgabe H 66. *Diagonalisierbarkeit*

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A und B.

(b) Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie, wenn möglich, für $X \in \{A, B\}$ jeweils eine reguläre Matrix S und eine Diagonalmatrix D, sodass $S^{-1}XS = D$ gilt.

Aufgabe H 67. *Verallgemeinerte Fibonacci-Folge*

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$f_1 := 2\,, \quad f_2 := t \in \mathbb{R}\,, \quad f_{n+2} := 3f_{n+1} - 2f_n \ \text{ für } n \geqq 1\ .$$

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A so, dass für alle $n \geqq 1$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$A\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^n\begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie eine Matrix T so, dass $T^{-1}AT$ Diagonalform besitzt.
Bestimmen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$.

(c) Bestimmen Sie mit **(a)** und **(b)** eine geschlossene Formel (ohne Rekursion) für f_n bezüglich $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H 68. *Quadriken und Hauptachsentransformation*

Gegeben sei die quadratische Form

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x \mapsto q(x) := \frac{1}{2}x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3 + 10x_3^2.$$

(a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $q(x) = x^\intercal Ax$. Entscheiden Sie, ob q positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.

(b) Bestimmen Sie den Typ (kegelig, parabolisch, Mittelpunktsquadrik) der Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid q(x) - 7x_2 + \frac{7}{2}x_3 - \frac{7}{2} = 0\}$.

(c) Berechnen Sie eine euklidische Normalform von Q.

(d) **(i)** Geben Sie ein Koordinatensystem an, in dem Q diese euklidische Normalform hat.
(ii) Klassifizieren Sie die Quadrik in (c) weiter nach 7.3.7/7.3.8.

Aufgabe H 69. *Symmetrische Matrizen*

Sei A eine reelle, symmetrische Matrix mit Eigenwerten $1+\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$ und 1, sowie den zugehörigen Eigenräumen

$$V(1+\sqrt{5}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(1-\sqrt{5}) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V(1) = \mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $D = S^{\mathsf{T}}AS$.

(c) Bestimmen Sie A.

Frischhaltebox

Aufgabe H 70. *Folgen*

Gegeben sei die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(\frac{1}{n^2} - 3\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n := \frac{(n-1)^2\cos(n\pi)}{4n^2}, \quad c_n := |a_n|, \quad d_n := |b_n|.$$

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz. Bei Konvergenz geben sie deren Grenzwert an.