Vortragsübung 8

Aufgabe V22:

Wiederholung

HM 2 braucht Grundlagen aus HM 1

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n! \cdot n!}{(2n)!}$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n \cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)(n+2)\cdot \ldots \cdot 2n}$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} = \frac{n!}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} \;\lightning$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2n}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k}$$

geschlossene Formeln sind oft besser, weil Muster erkennbar werden

Wie groß ist dieser Ausdruck?

Abschätzung: $n \geq k$, aber im Nenner

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k} \leq \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{2k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}{0} \leq \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Nach Sandwichsatz konvergiert a_n gegen 0

oder als Formel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 0$

Fachbegriff: Nullfolge

Alternativ:

a_n lässt sich auch anders nach oben abschätzen:

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{2}{2n-1}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{3}{2n-2}}_{\leq 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n+2}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\leq 1}$$

$$\leq \frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2-n}}$

Im Ausdruck steckt $\frac{n}{n+1} = \frac{n \cdot 1}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

Erinnerung: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Potenzgesetze wiederholen

$$b_n := \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2-n}}$$

$$= \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2-n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^2-n)\cdot\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2-n}{n}}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e} \cdot \frac{1+0}{1} = \frac{1}{e}$$

Aufgabe V23

Konv/Div-Kriterien für Reihen verstehen und anwenden

=> Kriterien bewerten & abwägen um ein passendes Kriterium zu wählen, das schnell ans Ziel führt.

a)

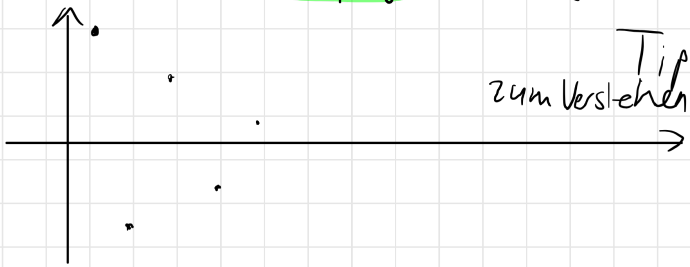
1. Nullfolgen-Kriterium

Die Reihe über eine Folge, die keine Nullfolge ist, ist divergent

Falle: Die Reihe über eine Nullfolge kann trotzdem divergieren!

2. Leibniz - Kriterium

Die alternierende Reihe über eine monotone Nullfolge konvergieren.



Tipp: Eine Bed. zum Verstehen weglassen und schauen was passiert.

3. Majoranten / Minorantenkriterium

1. Falle: Majorante $\Rightarrow$ Konvergenz
   Minorante $\Rightarrow$ Divergenz
2. Falle: Nicht für Konvergenzwert geeignet!
3. Falle: Beträge bedenken!

4. Quotienten-Kriterium

Konvergenz gilt, wenn

$$\forall n > n_0 : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq t < 1$$

Divergent wenn $\geq t > 1$

5. Wurzelkriterium

Konvergenz gilt, wenn

$$\forall n > n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq t < 1$$

Div: $\geq t > 1$

b)

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

1) Nullfolgen-Kriterium:

Dank V22 a wissen wir, dass

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 0$, also Nullfolge.

$\Rightarrow$ Keine Aussage ableitbar

2) Leibniz-K:

Die Reihe ist nicht alternierend,

also L-K nicht anwendbar

3) Q-K

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!} : \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot \cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!} \cdot (2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(n!)^2}}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{(2n+1)\cdot 2} = \frac{n+1}{4n+2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} < 1$$

$\Rightarrow$ Die Reihe konv. absolut.

4) Wurzel-Kriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \overset{22a)}{\leq} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ Die Reihe konv. absolut.

5) Maj / Min

Vorwissen: Die Reihe konv., also

Suche nach konvergenter Majorante

Aus V22a wissen wir $|a_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ Majorante.

Da dies eine geometrische Reihe ist, wissen wir, dass die Majorante konv. (sogar absolut), daher konv. auch unsere Reihe. (auch absolut, weil alle Folgenglieder nicht negativ sind)

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k^2+1} - k$

1) Nullfolgen-Kr:

Nullfolge?

$$a_k = \sqrt{k^2+1} - k = \frac{(\sqrt{k^2+1}-k)(\sqrt{k^2+1}+k)}{\sqrt{k^2+1}+k}$$

$$\overset{\text{3 bino Formel}}{=} \frac{k^2+1 - k^2}{\sqrt{k^2+1}+k} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}+k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

=> Nullfolge, keine Aussage möglich

2) Leibniz: Reihe nicht alternierend

3) Quot-K

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\sqrt{k^2+1}+k}{\sqrt{(k+1)^2+1}+k+1} = \frac{\sqrt{k^2(1+\frac{1}{k^2})}+k}{\sqrt{k^2+2k+2}+k+1}$$

$$= \frac{\cancel{k}\cdot(\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}+1)}{\cancel{k}(\sqrt{1+\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2}}+1+\frac{1}{k})}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2}}+1+\frac{1}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1+1}{1+1} = 1$$

=> Keine Konv. aussage möglich

4) Wurzel-Kriterium

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt[k]{\sqrt{k^2+1}+k}} \xrightarrow{k\to\infty} ?$$

$$\sqrt[k]{\sqrt{k^2+1}+k} \geq \sqrt[k]{\sqrt{k^2}+k} = \sqrt[k]{k+k}$$

$$= \sqrt[k]{2k} = \sqrt[k]{2} \cdot \sqrt[k]{k}$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} 1$$

$$\sqrt[k]{\sqrt{k^2+1}+k} \leq \sqrt{\sqrt{2k^2}+k} = \sqrt[k]{(\sqrt{2}+1)k}$$

$$= \sqrt[k]{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[k]{k} \xrightarrow{k\to\infty} 1$$

$\Rightarrow$ Keine Aussage möglich

5) Maj/Min

Vermutung: Reihe divergiert wegen Ähnlichkeit zu harmonischer Reihe

Suche nach div. Minorante

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}+k} \geq \frac{1}{\sqrt{2k^2}+k} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{1}{k} = b_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist divergent. (Vielfaches der harm. Reihe)

$\Rightarrow$ Unsere Folge ist div., (Start $k=0/k=1$ egal)

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3+(-1)^n)^n}$

$a_n = \frac{(-1)^n}{(3+(-1)^n)^n} = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \left(-\frac{1}{4}\right)^n & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$

1) Nullfolgen K: a_n ist Nullfolge $\Rightarrow$ Keine Aussage

2) a_n ist alternierende Nullfolge, aber $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht monoton

$|a_n|: \underset{|a_0|}{1} > \underset{|a_1|}{\frac{1}{2}} > \underset{|a_2|}{\frac{1}{16}} < \underset{|a_3|}{\frac{1}{8}}$

$\Rightarrow$ Leibniz nicht anwendbar

3) Quot-Kriterium

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} : \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \text{ ungerade} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} : \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot 2^n, & n \text{ gerade} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Häufungspunkte 0 und ∞

also $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ und

$\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \Rightarrow$ Keine Konvaussage

4) Wurzel-Krit

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Häufungspunkte $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$,

also $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ Reihe ist (absolut) konvergent.

5) Maj / Min

Suche nach konv. Maj.

$|a_n| \leq \frac{1}{2^n}$, (NICHT: $\frac{1}{4^n}$)

und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konv. (geom. Reihe)

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert (absolut)

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n-1}$, $\quad a_n := \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n-1}$

1) Nullfolgen-Kriterium

V 16 b: $\lim\limits_{n=1} \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n-1} = \frac{1}{e} \neq 0$

$\Rightarrow$ keine Nullfolge

$\Rightarrow$ Keine Konvergenz (auch nicht absolut)

2) Leibniz: Keine Nullfolge

3) Quot-Kriterium

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1}|}{\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|} = \frac{\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} = 1$$

$\Rightarrow$ Keine Aussage

4) Wurzel-Kriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+1}\right)^{n-1}} = 1$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{1+n}\right)^{n-1}}$$

$$= \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\geq 1}}$$

$$\geq \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{\lim\limits_{n\to\infty}} 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

$\Rightarrow$ keine Aussage

5) Maj / Min

$$a_n = \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\leq 3}} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\geq 1}$$

$$\geq \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} = b_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert (Div. Minorante),

also divergiert auch unsere Reihe

v) $\sum_{n=2}^{\infty} \cos(n \cdot \pi) \cdot \frac{n^2+1}{\sqrt{n^5-1}}$

Tipp: umformen

$$a_n = \cos(n\pi) \cdot \frac{n^2+1}{\sqrt{n^5-1}}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\sqrt{n-\frac{1}{n^4}}}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n-\frac{1}{n^4}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

1) Nullfolge Krit: Keine Aussage

2) Leibniz: Nullfolge ✓

- alternierend ✓

- monoton fallend ✓

weil $1+\frac{1}{n^2}$ monoton fallend

& $n-\frac{1}{n^4}$ monoton steigend

$\Rightarrow$ Unsere Reihe konvergiert

(Keine Aussage über absolute Konv.)

3) Quot - Krit:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2+1}{\sqrt{(n+1)^5-1}} \cdot \frac{\sqrt{n^5-1}}{n^2+1}$$

$$= \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} \cdot \sqrt{\frac{n^5-1}{(n+1)^5-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

(Stetigkeit der Wurzelfunkt!)

$\Rightarrow$ Keine Aussage

4) Wurzel-Krit:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{\sqrt{n^5-1}}}$$

$$\geq \sqrt[n]{\frac{n^2}{\sqrt{n^5}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{\sqrt{n^5-1}}} \leq \sqrt[n]{\frac{2n^2}{\sqrt{\frac{n^5}{2}}}}$$

$$= \sqrt[n]{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$\Rightarrow$ Keine Aussage

5) Maj / Min

Konv. Untersuchung Σ weil nicht alle Folgenglieder ≥ 0

Absolute Konv:

$$|a_n| = \frac{n^2+1}{\sqrt{n^5-1}} \geq \frac{n^2}{\sqrt{n^5}} = \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$$

$\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ divergiert,

also auch $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$,

$\Rightarrow$ Unsere Reihe ist nicht absolut konvergent.

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n^2-n}$

$$a_n = \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n^2-n} = \left(\left(\frac{n}{1+n}\right)^{n-1}\right)^n$$

1) Nullfolgen-Kriterium

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{\left(\frac{n}{1+n}\right)^{n-1}}\Big)^n$$

$$\overset{V226}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$$

$\Rightarrow$ keine Aussage

2) Leibniz : nicht alternierend

3) Wurzel-Krit:

V226 : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{e} < 1$

$\Rightarrow$ abs. Konvergenz

4) Quot-Krit.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2+n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2-n}$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2}{n\cdot(n+2)}\right)^{n^2+2n} \cdot (n+1)^{-4n} \cdot \left(\frac{1}{n+2}\right)^{-n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{-3n}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{-n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-3n}$$

$$= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n}}_{\text{Teilfolge}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} e \cdot e \cdot e^{-3}$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ absolute Konv.

5) Maj / Min

$$a_n = \left(\left(\frac{n}{1+n}\right)^{n-1}\right)^n$$

$$b_n := \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n-1} \text{ konv. gegen } \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow b_n \leq \frac{1}{2} \text{ für } n \geq n_0$$

$$\Rightarrow a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ für } n \geq n_0$$

$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergiert, also auch unsere Reihe

Index start bei n_0 statt 1
spielt für Konvergenzverhalten keine Rolle

	Nullfolge	Leibniz	Quot	Wurzel	Maj Min	abs konv	konv nicht abs.	div
(i)	—	—	✓	✓	konv Maj	✓		
(ii)	—	—	—	—	div Min			✓
(iii)	—	—	—	✓	konv Maj	✓		
(iv)	✓	—	—	—	div Min			✓
(v)	—	✓	—	—	|div Min|		✓	
(vi)	—	—	✓	✓	konv Maj	✓		