Übungsblatt 3

»Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Dasein, sonder das Hinkommen, was den größten Genuß gewährt.«

(Carl Friedrich Gauß, 1777–1855)

V 3.1. Gegeben seien die zwei Basen $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Es bezeichne weiterhin $\mathrm{id} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die identische Abbildung. Bestimmen Sie die darstellende Matrix ${}_{B_2}[\mathrm{id}]_{B_1}$ zur Abbildung id, wenn im Urbildraum die Basis B_1 und im Bildraum die Basis B_2 gewählt wird.

S 3.2. (**6 Punkte**) Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils den Rang der folgenden Matrizen

(a) A_1

(b) A_3

(c) A_2^T

(d) $A_2 \cdot A_3$

V 3.3. Es sei V ein reeller Vektorraum mit $\dim(V) = 5$. Es seien weiterhin $U_1, U_2, U_3 \subset V$ Untervektorräume mit

$$\dim(U_1) = 2, \quad \dim(U_2) = 3 \quad \text{und} \quad \dim(U_3) = 4.$$

Welche Dimensionen können die folgenden Untervektorräume annehmen?

(i) $U_1 \cap U_2$

(ii) $U_2 + U_3$

(iii) $U_3 \cap U_1$

(iv) $U_2 \cap U_3$

Zusatz: Sei nun explizit $V = \mathbb{R}^5$ und U_2, U_3 gegeben durch

$$U_2 = \mathrm{Lin} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad U_3 = \mathrm{Lin} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie eine Basis von $U_2 \cap U_3$.

V 3.4. Wir betrachten die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie eine untere Dreiecksmatrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, sodass PA in Zeilenstufenform, d.h. eine obere Dreiecksmatrix, ist. **Hinweis:** Verwenden Sie den Gauß-Algorithmus.

(b) Berechnen Sie die Determinante von A.

V 3.5. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Falls

$$\mathrm{Bild}(\varphi) + \mathrm{Kern}(\varphi) \neq V$$

dann existiert ein $v \in V$, sodass

$$\varphi(v) \neq 0 \quad \text{und} \quad (\varphi \circ \varphi)(v) = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Rangsatz.

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,arthur.guenthner,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de