Übungsblatt 4

»To be stupid, selfish, and have good health are three requirements for happiness, though if stupidity is lacking, all is lost.«

(Gustave Flaubert, 1821 – 1880)

V 4.1. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

V 4.2. Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -5 \\ -2 & 10 & -2 \\ -5 & -2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Vektoren um Eigenvektoren der Matrix A handelt und bestimmen Sie gegebenenfalls den entsprechenden Eigenwert.

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **(b)** $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(c)** $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. **(d)** $v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

V 4.3. Es seien $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ beliebige Punkte für eine $n \in \mathbb{N}_0$. Die Vandermondematrix $V(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ ist gegeben durch

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jede Wahl von beliebige Punkten $x_0, \dots, x_n$ die Determinante der Vandermondematrix gegeben ist durch

$$\det V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Hinweis: Der Beweis kann mittels einer vollständigen Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ geführt werden. Für den Induktionsschritt und die Anwendung der Induktionsvorausetzung empfiehlt es sich die Matrix durch Spaltenoperationen auf die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

zu bringen und anschließend eine Reihenentwicklung durchzuführen.

V 4.4. Wir betrachten ein Netzwerk von verlinkten Webseiten $P_1, \dots, P_5$. Das Ziel ist es nun die Webseiten nach ihrer Relevanz zu ordnen.

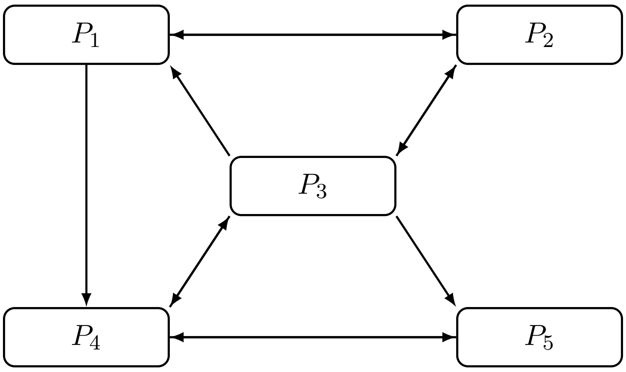

Abbildung 1: Netzwerk für 5 Webseiten.

Dafür betrachten wir die folgenden Größen für $m = 1, \dots, 5$:

$x_m \in \mathbb{R}_+$: Relevanz der Seite P_m

$l_m \in \mathbb{N}$: Anzahl an Links, die von P_m ausgehen

$S_m \subset \{1, \dots, 5\}$: Seitennummer der Seiten, die auf P_m verweisen, d,h.

$S_m = \{i \,|\, P_i \text{ hat einen Link auf } P_m\}$.

Die Relevanz x_m von P_m ist nun die gewichtete Summe der Relevanz aller anderen Seiten, die auf P_m verlinken:

$$x_m = \sum_{i \in S_m} \frac{1}{l_i} x_i, \quad m = 1, \dots, 5. \tag{1}$$

(a) Schreiben Sie das LGS (1) für das in Abbildung 1 dargestellte Webseiten-Netz in Matrix-Vektor Form, d.h. bestimmen Sie $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, sodass

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = Ax. \tag{2}$$

(b) Lösen Sie die Gleichung (2), indem Sie einen Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 bestimmen und dieses so normieren, dass sich die Summe aller Relevanzen zu 1 ergibt.

Z 4.5. Es sei V_n der reelle Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner oder gleich $n \in \mathbb{N}$. Nutzen Sie Aufgabe 4.3, um zu zeigen, dass die Monome $1, x, \ldots, x^n$ eine Basis von V_n bilden.

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,arthur.guenthner,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de