Übungsblatt 5

»Die Beschäftigung mit Mathematik, sage ich, ist das beste Mittel gegen die Kupidität.«

(Thomas Mann (Hofrath Behrens in: Der Zauberberg), 1875 – 1955)

S 5.1. (**6 Punkte**) Es bezeichne $V = C([-1,1])$ den Vektorraum stetiger Funktionen, die vom Intervall $[-1,1]$ in die reellen Zahlen abbilden. Wir statten V mit einem Innenprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ aus, welches für beliebige $f, g \in V$ durch

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f, g \in V$ gegeben durch $f(x) = \sin(\pi x)$ und $g(x) = \cos(\pi x)$ orthogonal zueinander sind.

(b) Es bezeichnen $v_0, v_1, v_2, v_3 \in V$ die Monome gegeben durch

$$v_i(x) = x^i, \quad i = 0,1,2,3.$$

Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Vektoren v_0, v_1, v_2, v_3 an.

V 5.2. Für $n \in \mathbb{N}$ können wir unter Verwendung des Spuroperatos $\mathrm{Spur} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ wie folgt eine Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ definieren:

$$\forall_{A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}} \quad \langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(A^T B).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Innenprodukt auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ darstellt.
Hinweis: Sie dürfen die folgenden Eigenschaften des Spuroperators verwenden:

- **(i)** Der Spuroperator ist linear.
- **(ii)** Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(A^T)$.
- **(iii)** Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

(b) Bestimmen Sie $\langle A, B\rangle$ für $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,arthur.guenthner,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de

V 5.3. Es sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren der Matrix A.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

V 5.4. Lösen Sie die folgenden Probleme durch geschickte Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

(a) Es sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, sodass $v_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass

$$\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n v_i^{-1}\right) \geq n^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass für $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \geq \frac{36}{x+y+z}$$

(c) Es seien $x_1, \dots, x_n > 0$, sodass $1 = x_1 + \dots + x_n$. Bestimmen Sie

$$\min\left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right).$$

V 5.5. Die Matrix $N \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nilpotent, d.h. $N^3 = 0$.

(a) (Optional) Verifizieren Sie, dass $N^3 = 0$.

(b) Bestimmen Sie (ohne explizite Berechnung) welche Eigenwerte die Matrix N hat.

(c) Berechnen Sie jeweils alle Eigenvektoren von N, N^2 und N^3.

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,arthur.guenthner,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de