Übungsblatt 6

»Im großen Garten der Geometrie kann sich jeder nach seinem Geschmack einen Strauß pflücken.«

(David Hilbert, 1862 – 1943)

V 6.1. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir eine beliebige komplexwertige Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Mittels A können wir nun eine quadratische Form auf $\mathbb{C}^n$ definieren mittels

$$q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto x^* A x.$$

Zeigen Sie, dass die Matrix A eindeutig durch die Werte der quadratischen Form q bestimmt ist, d.h. es jeder Eintrag von A lässt sich als Linearkombination von Auswertungen von q schreiben.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 2$ und verallgemeinern Sie diesen anschließend.

V 6.2. Wir betrachten die selbstadjungierte Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 5 & 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 3 & -3 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, sodass $U^* A U$ diagonal ist.

V 6.3. Gegeben sei die folgende quadratische Form über $\mathbb{R}^3$

$$q(x) = 7x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2^2 - 4x_2x_3 + 7x_3^2.$$

(a) Schreiben Sie q in der Form $q(x) = x^T A x$ für eine geeignete symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(b) Führen Sie eine Hauptachenstransformation von A durch, d.h. bestimmen Sie $V \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\hat{q}(x) := q(Vx) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2.$$

(c) Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung $q(x) = 1$ beschrieben?

Hinweis: Die Matrix A hat den Eigenwert 6.

V 6.4. Wir bezeichnen mit V_2 den reellen Vektorraum aller reellwertigen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2. Weiterhin betrachten wir die zwei Basen

$$B_1 = (1, x, x^2) \quad \text{und} \quad B_2 = (x, x-1, (x-1)(x-2))$$

sowie die Bilinearformen $\beta_1, \beta_2 : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \beta_1(p,q) &= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) \\ \beta_2(p,q) &= p(0)q(1) + p(1)q(0). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils die Gram-Matrix der Bilinearformen β_1, β_2 zu den Basen B_1 und B_2.

(b) Entscheiden Sie anhand der Gram-Matrizen aus **(a)**, ob es sich bei β_1 bzw. β_2 sogar um Innenprodukte handelt.

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,arthur.guenthner,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de