Übungsblatt 7

»The introduction of numbers as coordinates is an act of violence.«

(Hermann Weyl, 1885-1955)

V 7.1. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

V 7.2. **(a)** Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, versehen mit einer von einem Innenprodukt induzierten Norm $\|\cdot\|$, d.h. das Innenprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V erfüllt $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie, dass die Identität

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

für alle $x, y \in V$ erfüllt ist.

(b) Sei nun V der Raum der absolut summierbaren Folgen, also der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty,$$

versehen mit der Norm

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Warum gibt es kein Innenprodukt auf V, welches diese Norm induziert?

V 7.3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Ist f differenzierbar im Punkt $(0,0)$?

(c) Untersuchen Sie, ob f stetig im Punkt $(0,0)$ ist. Was fällt Ihnen auf?

V 7.4. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von

(a) $f_1(x,y) = x^3 + 3y^2 - 2xy + 4$ für $x, y \in \mathbb{R}$,

(b) $f_2(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$ für $x \neq 0, y \in \mathbb{R}$,

(c) $f_3(x,y) = x^y$ für $x \geq 0, y \in \mathbb{R}$.

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,arthur.guenthner,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de