Übungsblatt 8

»Ein Inhalt wird dazu in algebraische Formeln eingeschlossen, damit man, indem man die Formel anwendet, nicht hundertmal ein und dasselbe wiederholen muß.«

(A. I. Herzen, 1812-1870)

V 8.1. Prüfen Sie, ob der Satz von Schwarz bei den folgenden Funktionen anwendbar ist und berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen, falls diese existieren.

(a) $f_1(x,y) = \ln(\sqrt{\cos^2(xy)+1})$,

(b) $f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$

(c) $f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

V 8.2. Wir definieren

$$f(x,y) = 3x^3 + 2xy - y + 4.$$

Bestimmen die Richtungsableitung von f

(a) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $a = (3,3)^\top$,

(b) im Punkt $(3,-7)$ in Richtung $a = (1,2)^\top$,

(c) im Punkt $(-2,-4)$ in Richtung $a = (-5,4)^\top$.

V 8.3. Berechnen Sie die Ableitung der nachfolgenden differenzierbaren Funktionen, d.h. die lineare Näherung L_x mit $f(x+h) = f(x) + L_x h + o(h)$.

(a) $f_1 : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\quad f_1(A) = e^A$ im Punkt $A = I$,

(b) $f_2 : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $\quad f_2(A) = \mathrm{tr}(A)$,

(c) $f_3 : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$, $\quad f_3(A) = \det(A)$ im Punkt $A = I$,

(d) $f_4 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad f_4(v,w) = v^\top A w$.

Dabei ist die in **(d)** angegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ein Parameter.

V 8.4. Es sei $\mathbb{R}^2$ versehen mit dem Standardinnenprodukt und

$$f(x,y) = -2y^3 - 4x^2 - y^2 + 4xy + 3x + 17.$$

(a) Bestimmen Sie die Menge

$$N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \nabla f(x,y) = 0\}.$$

(b) Berechnen Sie die Hessematrix $H_f(x,y)$ von f für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Wir betrachten nun $(x,y) \in N$. Welche $H_f(x,y)$ sind positiv definit? Welche sind negativ definit?

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,arthur.guenthner,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de