Übungsblatt 9

»It will not do to memorize the formulas, and to say to yourself: "I know all the formulas; all I gotta do is figure out how to put 'em in the problem!"«

(Richard Feynman, 1918-1988)

S 9.1. (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = 2xy\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

Bestimmen Sie die kritischen Punkte und untersuchen Sie diese auf lokale Minima und Maxima. Skizzieren Sie anschließend die Funktion.

V 9.2. Der Laplace-Operator Δ in zwei Dimensionen ist gegeben durch

$$\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f$$

für $f \in C^2(U;\mathbb{R})$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ offen.

(a) Leiten Sie die Darstellung

$$\Delta f = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r f) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 f$$

in Polarkoordinaten her.

(b) Es sei $\lambda > 0$ und $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}}.$$

Berechnen Sie Δf.

V 9.3. Es gibt neben den kartesischen Koordinaten und den Polarkoordinaten noch weitere Darstellungen von Punkten im $\mathbb{R}^2$. Die parabolischen Koordinaten (μ,ν) ergeben sich aus

$$x = \mu\nu$$
$$y = \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2)$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\nu \geq 0$. Beschreiben Sie die partiellen Ableitungen ∂_x und ∂_y ausschließlich durch ∂_μ und ∂_ν. Verwenden Sie das, um zu zeigen, dass der Laplace-Operator in parabolischen Koordinaten durch

$$\Delta f = \frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left(\partial_\mu^2 f + \partial_\nu^2 f\right)$$

dargestellt wird.

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,arthur.guenthner,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de

V 9.4. Zeigen Sie, dass der Wärmeleitungskern $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t,x) := (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2}{4t}\right)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}^2 u$$

ist, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$.

V 9.5. Finden Sie für die folgenden Kurven $x(t)$ Umparametrisierungen $\varphi(s) = t$, sodass die Kurve $x(\varphi(s))$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, also $\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} x(\varphi(s))\| = 1$ gilt.

(a) $x : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$x(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{4-t^2} \end{pmatrix},$$

(b) $x : [0,R] \to \mathbb{R}^2$ mit festem $R > 0$ und

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ t \end{pmatrix}.$$

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,arthur.guenthner,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de