Übungsblatt 12

»Die größte Verwundbarkeit ist die Unwissenheit.«

(孙子, um 500 v. Chr.)

V 12.1. Berechnen Sie die Divergenz und Rotation der folgenden Vektorfelder.

(a) $v(x,y,z) = -\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)^{3/2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \neq (0,0,0),$

(b) $v(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$

In welchem Bereich der Experimentalphysik treten diese Felder auf?

V 12.2. Prüfen Sie, ob das Vektorfeld

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+yz \\ xz-2y \\ xy \end{pmatrix}$$

ein Potential besitzt und geben Sie, falls existent, ein Potential an.

V 12.3. Es seien $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ und $v \in C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Identitäten gelten:

(a) $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0,$

(b) $\nabla \cdot (\nabla \times v) = 0,$

(c) $\nabla \times (\nabla \times v) = \nabla(\nabla \cdot v) - \Delta v.$

Der Laplaceoperator Δv ist dabei komponentenweise zu verstehen.

V 12.4. Es seien E und B zeitabhängige Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^3$, zweifach differenzierbar in der Zeit und im Ort sind. Weiterhin sei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Die Maxwell-Gleichungen im ladungsfreien Vakuum sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= 0, \\ \nabla \cdot B &= 0, \\ \nabla \times E &= -\partial_t B, \\ \nabla \times B &= \frac{1}{c^2}\partial_t E. \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen und der Identitäten aus Aufgabe V 12.3, dass E die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 E - \Delta E = 0$$

erfüllt.

jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
[jonas.brinker,arthur.guenthner,robin.lang,dominik.wittwar]@mathematik.uni-stuttgart.de

S 12.5. (6 Punkte) Gegeben sind die Vektorfelder

$$v_1(x,y) = \begin{pmatrix} \ln\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi(x,y) \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \neq (0,0),$$

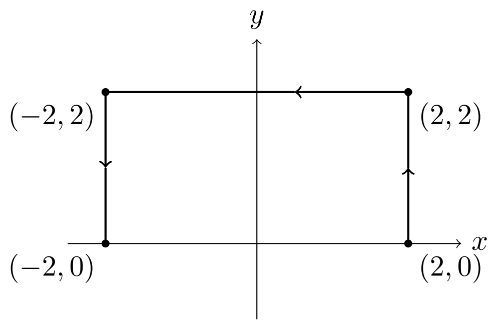
wobei $\varphi(x,y)$ den Winkel zwischen der x-Achse und dem Punkt (x,y) in Bogenmaß beschreibt und

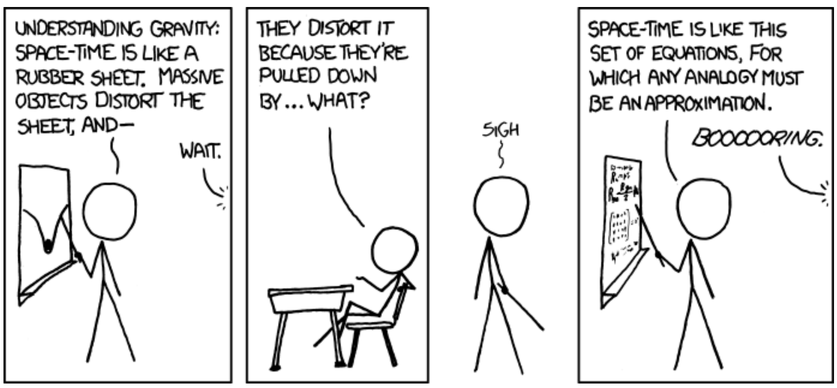
$$v_2(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos(y)\mathrm{e}^x \\ \sin(y)\mathrm{e}^x + 4y \end{pmatrix}.$$

(a) Prüfen Sie, ob die Integrabilitätsbedingung für v_1 und v_2 erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie ein Potential von v_2.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art für beide Vektorfelder und die unten angegebene Kurve von $(2,0)$ nach $(-2,0)$ auf eine geeignete Weise.
Hinweis: Nutzen Sie die Integrabilitätsbedingung.





Quelle: https://xkcd.com/895/