Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

1. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

1.1. Seien B_1, B_2 und B_3 die folgenden Teilmengen von $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{-12, -6, 0, 2, 3, 7, 12, 13, 27\}, \\ B_2 &:= \{z \in \mathbb{Z} \mid 3z = w^2, w \in \mathbb{Z}\}, \\ B_3 &:= \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 \leq 3\}. \end{aligned}$$

Geben Sie die Elemente von $B_1 \cap B_2$, B_3, $B_1 \cup B_3$ und $B_2 \cap B_3$ explizit an.

1.2. Schriftlich: (c), (e) – 3 Punkte. Eine natürliche Zahl $p \geq 2$ heißt *Primzahl*, falls sie nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) 2 ist eine Primzahl oder 2 ist ungerade.
(b) 2 ist eine Primzahl oder 2 ist gerade.
(c) Wenn 2 ungerade ist, dann ist es eine Primzahl.
(d) Wenn 2 ungerade ist, dann ist 3 keine Primzahl.
(e) Wenn 2 gerade ist, dann ist es eine Primzahl.
(f) Gilt $n^2 - 5n + 4 = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann ist $n = 1$.
(g) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass wenn n eine Quadratzahl ist, dann ist n keine Primzahl.

1.3. Drei Koffer liegen Ihnen vor. Einer enthält Geld, die anderen zwei sind leer. Jeder Koffer hat ein Etikett mit einem Hinweis auf seinen Inhalt. Die Hinweise lauten:

- Koffer 1: „Das Geld ist nicht hier.“
- Koffer 2: „Das Geld ist nicht hier.“
- Koffer 3: „Das Geld ist im Koffer 1.“

Nur ein Hinweis ist wahr, die anderen sind falsch. Können Sie mit diesen Angaben den Koffer bestimmen, der das Geld enthält? Wenn ja, in welchem Koffer ist das Geld? Begründen Sie Ihre Antwort.

1.4. Schriftlich: (b) – 3 Punkte.

(a) Welche der folgenden Argumente sind logisch korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort. Schreiben Sie im Fall der Korrektheit die Argumentation symbolisch auf.
  (i) Ich nehme meinen Schirm mit, wenn es regnet. Es regnet nicht. Also nehme ich meinen Schirm nicht mit.
  (ii) Ich nehme meinen Schirm nur mit, wenn es regnet. Es regnet nicht. Also nehme ich meinen Schirm nicht mit.

(b) Bilden Sie die Negation der folgenden Aussagen:
  (i) Es gibt Elefanten, die sprechen können.
  (ii) Es existiert ein $x \in \mathbb{Q}$ so, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x = \dfrac{n}{m}$.
  (iii) $\forall\, x \in \mathbb{N}\ \exists\, n_1 \in \mathbb{N}\ \exists\, n_2 \in \mathbb{N} : 2^x = 2n_1n_2$.

1.5. Schriftlich: (b), (d) – 4 Punkte. Zeigen Sie:

(a) Wenn n eine ungerade natürliche Zahl ist, dann ist n^2 auch ungerade.

(b) Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist $n(n+1)$ gerade.

(c) Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist $n^3 + n^2$ gerade.

(d) Wenn n und m natürliche Zahlen sind, dann ist $n^{m+1} + n^m$ gerade.

1.6. Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $2^n > n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$.

1.7. Lernen Sie die ersten sechs Buchstaben des griechischen Alphabets.