Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

2. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich" gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

2.1. Schriftlich: komplett – 2 Punkte. Gegeben sind die folgenden beiden Aussagen für $a, b, c \in \{2, 7\}$:

(1) Falls a ungerade ist, dann ist b gerade.

(2) Falls b ungerade ist, dann sind a und c gerade.

Nehmen Sie an, dass eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch ist. In welchem Fall gibt es eine Lösung? Ist diese eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.2. Ist das folgende Argument logisch korrekt? Falls nicht, begründen Sie warum.

Jede Primzahl p mit $p \geq 6$ ist nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar. Die Zahl 53 ist nicht durch 2 teilbar, denn $53 = 2 \cdot 26 + 1$ und sie ist weder durch 3 noch durch 5 teilbar, weil $53 = 3 \cdot 17 + 2$ und $53 = 5 \cdot 10 + 3$ ist. Folglich gilt, dass 53 eine Primzahl ist.

2.3. Schriftlich: (a), (d), (g) – 5 Punkte. Sei X eine Menge und seien A, B, C, D Teilmengen von X. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

(b) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

(c) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

(d) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

(e) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

(f) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

(g) $A \cup B = A \cap B \iff A = B$

2.4. Schriftlich: komplett – 3 Punkte. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Betrachten Sie das Produkt

$$p_n := \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

(a) Berechnen Sie p_2, p_3, p_4 und p_5.

(b) Vermuten Sie eine Formel für p_n als einen Bruch und zeigen Sie diese dann induktiv.

2.5. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ teilbar durch 6.

(b) Für alle ungeraden natürlichen Zahlen u ist $2^u + 1$ teilbar durch 3.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

2.6. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Gegeben ist die Gleichung $G_{m,n}$ von der Form $x_1 + \cdots + x_m = n$ für die Variablen $x_i \in \mathbb{N}_0$. Sei $l_{m,n}$ die Anzahl der Lösungen von $G_{m,n}$.

(a) Zeigen Sie, dass $l_{m,1} = m$ und $l_{1,n} = 1$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

(b) Nehmen Sie an, dass

$$l_{m,n+1} = \frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!} \text{ und } l_{m+1,n} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

für fest gewählte $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $l_{m+1,n+1} = \dfrac{(n+m+1)!}{(n+1)!m!}$.

(c) Kann man aus den Teilen (a) und (b) folgern, dass

$$l_{m,n} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.7. Lernen Sie die ersten zwölf Buchstaben des griechischen Alphabets.