Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

3. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

3.1. Seien p und q Aussagen. Zeigen Sie mit Hilfe der entsprechenden Wahrheitstabelle, dass die folgende Aussage immer wahr ist:

$$\Big(\big((\neg p) \Rightarrow q\big) \wedge \big((\neg p) \Rightarrow (\neg q)\big)\Big) \Rightarrow p$$

3.2. Schriftlich: komplett – 5 Punkte. Der *größte gemeinsame Teiler* (ggT) zweier ganzer Zahlen a und b mit $(a, b) \neq (0, 0)$ ist eine natürliche Zahl m mit der Eigenschaft, dass sie Teiler sowohl von a als auch von b ist und dass jede ganze Zahl, die ebenfalls a und b teilt, ihrerseits Teiler von m ist. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $q \in \mathbb{Z}$ gilt: $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, a - qb)$.

(b) Nehmen Sie an, dass der Euklidische Algorithmus auf das Paar (a, b) angewandt wird. Wie in der Vorlesung seien die Reste bei der wiederholten Division mit Rest durch r_i bezeichnet, für $0 \leq i \leq n + 1$, wobei n maximal ist mit $r_n \neq 0$. Nutzen Sie Teil (a) um zu zeigen, dass $r_n = \mathrm{ggT}(a, b)$ ist.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(1980, 2184)$ mittels des Euklidischen Algorithmus, sowie $x, y \in \mathbb{Z}$, für die die Gleichung $1980x + 2184y = \mathrm{ggT}(1980, 2184)$ gilt.

3.3. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Wenn n eine ungerade ganze Zahl ist, dann sind n und $n + 2$ teilerfremd.

(b) Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt: $\mathrm{ggT}(a, b + c) = \mathrm{ggT}(a, b) + \mathrm{ggT}(a, c)$.

(c) Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt: $\mathrm{ggT}(a, b \cdot c) = \mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, c)$.

(d) Für alle ganzen Zahlen n gilt die Ungleichung $\mathrm{ggT}(n^2 + n + 1, n - 1) < 4$.

(e) Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{ggT}(a \cdot b, b \cdot c) = b \cdot \mathrm{ggT}(a, c)$.

3.4. Schriftlich: komplett – 2 Punkte. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Nehmen Sie an, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: Teilt n das Produkt $a \cdot b$, dann teilt n auch a oder b. Zeigen Sie, dass n eine Primzahl ist. Erfüllen alle Primzahlen diese Eigenschaft? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

3.5. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen p gibt, für die $p \bmod 3 = 2$ gilt.

Hinweis: Lassen Sie sich vom Beweis des Satzes von Euklid (Theorem 3.6 aus der Vorlesung) inspirieren.

3.6. Prüfen Sie die folgenden Relationen R auf X auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Welche der Relationen sind Äquivalenzrelationen? Beschreiben Sie für jede der Äquivalenzrelationen die Menge der Äquivalenzklassen. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Sei X die Menge aller Personen der Welt und R die Relation auf X definiert durch xRy, wenn x und y am gleichen Tag Geburtstag haben.

(b) Sei X die Menge aller Personen der Welt und R die Relation auf X definiert durch xRy, wenn x und y ein gemeinsames Elternteil haben.

(c) Sei $X = \mathbb{N}$ und R die Relation auf X definiert durch xRy, wenn y durch x teilbar ist.

(d) Sei $X = \mathbb{N}_0$ und R die Relation auf X definiert durch xRy, wenn $\sqrt{x} > \sqrt{y}$.

3.7. Schriftlich: komplett – 3 Punkte. Für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir die Relation R auf $\mathbb{R}^2$ durch xRy, wenn $\max\{|x_1|, |x_2|\} = \max\{|y_1|, |y_2|\}$.

(a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen von $(0, 0)$, $(-1, 0)$ und $(2, -3)$ in der reellen Ebene.

3.8. Lernen Sie das ganze griechische Alphabet.