Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

4. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

4.1. Sei m eine natürliche Zahl. Wir definieren auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen die folgende Relation: $a \equiv b \mod m$ genau dann, wenn $m \mid b-a$ ist. Aus Beispiel 4.5 aus der Vorlesung wissen wir, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist.

(a) Seien a_1, a_2, b_1 und b_2 ganze Zahlen mit $a_1 \equiv b_1 \mod m$ und $a_2 \equiv b_2 \mod m$. Zeigen Sie, dass die Relation $\equiv$ die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:

i. $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \mod m$;

ii. $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \mod m$.

Eine Äquivalenzrelation mit diesen Eigenschaften heisst eine *Kongruenzrelation.*

(b) Zeigen Sie, dass es unendlich viele natürliche Zahlen x gibt, die simultan die folgenden Gleichungen erfüllen: $x \equiv 1 \mod 2$, $x \equiv 2 \mod 3$ und $x \equiv 3 \mod 5$.

(c) Gibt es eine natürliche Zahl y mit der Eigenschaft $5y \equiv 2 \mod 17$? Sei p eine Primzahl. Gibt es für jede Wahl von $a, b \in \mathbb{Z}$ immer eine natürliche Zahl z mit $az \equiv b \mod p$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4.2. Prüfen Sie die folgenden Relationen auf $\mathbb{R}$ auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Die Relation R gegeben durch xRy, wenn $xy \leq 0$.

(b) Die Relation S gegeben durch xSy, wenn $|x-y| \leq 2$.

4.3. Seien n eine natürliche Zahl und sei A eine nicht-leere Menge mit n Elementen.

(a) Sei k eine natürliche Zahl mit $k \leq n$. Bestimmen Sie die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von A, genauer, zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$|\{B \subseteq A \mid |B| = k\}| = \binom{n}{k}.$$

(b) Sei m eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass es genau $\binom{n+m-1}{n-1}$ Funktionen $f : A \longrightarrow \mathbb{N}_0$ gibt mit $\sum_{x \in A} f(x) = m$.

4.4. Schriftlich: komplett – 4 Punkte. Entscheiden Sie, ob die folgenden Relationen R zwischen Mengen X und Y Funktionen sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Sei $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Q}$ und $R = \left\{ \left(x, \frac{3}{x - \frac{1}{3}} \right) \mid x \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq X \times Y$.

(b) Sei $X = \mathbb{Q}$, $Y = \mathbb{Z}$ und $R = \left\{ \left(\frac{x}{y}, x \right) \mid x \in \mathbb{Z},\, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \subseteq X \times Y$.

(c) Sei $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}$ und $R = \{(x-8, x) \mid x \in \mathbb{Z}\} \subseteq X \times Y$.

(d) Sei $X = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $Y = \mathbb{Q}$ und $R = \left\{ \left(\frac{x}{y}, \frac{x^2 - 2y^2}{xy} \right) \mid x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \subseteq X \times Y$.

4.5. Schriftlich: komplett – 6 Punkte. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \leq b$ definieren wir die Menge $M_{a,b} := \{x \in \mathbb{R} \mid a\pi \leq x \leq b\pi\}$.

(a) Ist die Funktion f injektiv? Ist sie surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie die Mengen $f(M_{0,1})$, $f(M_{0,2})$ und $f(M_{0,3})$.

(c) Bestimmen Sie $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$ und $f^{-1}(\{2\})$.

(d) Bestimmen Sie $f(M_{0,1}) \cap f(M_{2,3})$ und folgern Sie daraus, dass $f(M_{0,1} \cap M_{2,3}) \neq f(M_{0,1}) \cap f(M_{2,3})$ ist.

(e) Bestimmen Sie $f^{-1}(f(M_{0,1}))$ und $f(f^{-1}(M_{0,1}))$.

4.6. Seien $\alpha, \beta, \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, gegeben durch $\alpha(x) = x^3 - x$, $\beta(x) = \dfrac{x}{|x| + 1}$ und $\gamma(x) = x^3 + x$ für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie die Funktionen α, β und γ in der reellen Ebene.

(b) Untersuchen Sie die Funktionen α, β und γ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.