Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

5. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

5.1. Schriftlich: (c), (d), (e) – 3 Punkte. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = x^2 + 5x$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch $g(x, y, z) = 2^x \cdot 5^y \cdot 10^z$ für $(x, y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(c) $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gegeben durch $g(X) = X \cup \{1\}$ für $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(d) $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch $g(x) = |x| + 1$ für $x \in \mathbb{Z}$.

(e) $g : M \longrightarrow \mathbb{Q}$ gegeben durch $g(a, b) = \dfrac{a}{b}$ für $M := \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid \mathrm{ggT}(a, b) = 1\}$ und $(a, b) \in M$.

5.2. Seien $n, r \in \mathbb{N}$. Wir betrachten eine n-elementige Menge X und natürliche Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ mit $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j = n$. Zeigen Sie, dass es genau $\dfrac{n!}{\prod_{j=1}^{r} \alpha_j!}$ Abbildungen $f : X \longrightarrow \{1, \dots, r\}$ gibt, die jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ genau α_j-mal als Wert annehmen, d.h.:

$$\frac{n!}{\prod_{j=1}^{r} \alpha_j!} = \left| \{f : X \longrightarrow \{1, \dots, r\} \mid \alpha_j = \left|f^{-1}(\{j\})\right| \text{ für } j = 1, \dots, r\} \right|$$

5.3. Seien $\alpha : X \longrightarrow Y$ und $\beta : Y \longrightarrow Z$ Abbildungen und $\beta \circ \alpha : X \longrightarrow Z$ die Komposition von α und β. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Wenn α und β injektiv sind, dann ist $\beta \circ \alpha$ injektiv.

(b) Wenn α und β surjektiv sind, dann ist $\beta \circ \alpha$ surjektiv.

(c) Wenn $\beta \circ \alpha$ injektiv ist, dann ist α injektiv.

(d) Wenn $\beta \circ \alpha$ surjektiv ist, dann ist α surjektiv.

(e) Wenn $\beta \circ \alpha$ surjektiv ist, dann ist β surjektiv.

(f) Sei $X = Z$. Wenn $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_X$ ist, dann ist β injektiv oder α ist surjektiv.

5.4. Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$. Für $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq m$ definieren wir $S_{n,m} := \{x \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \leq m\}$.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es $m, r_0, \dots, r_m \in \mathbb{N}_0$ mit $0 < r_m < b$ und $0 \leq r_i < b$ für $i < m$ existiren, für die $n = r_m b^m + r_{m-1} b^{m-1} + \cdots + r_1 b + r_0$ gilt. Sind die Zahlen $m, r_0, \dots, r_m \in \mathbb{N}_0$ durch n eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Bilden Sie explizit eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $S_{1,b-1} \cup \Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \big(S_{1,b-1} \times (S_{0,b-1})^j \big) \Big)$.

5.5. Prüfen Sie die folgenden binäre Verknüpfungen auf Assoziativität, Kommutativität und Existenz eines neutralen Elementes.

(a) $a \star b := a + b - 1$ auf $\mathbb{Z}$.

(b) $a \star b := \begin{cases} 1 & \text{wenn } a \neq b \\ a & \text{wenn } a = b \end{cases}$ auf $\mathbb{Z}$.

(c) $a \star b := (a+b)^2$ auf $\mathbb{R}$.

5.6. Schriftlich: komplett – 7 Punkte. Für zwei Mengen X und Y wird $\mathrm{Abb}(X,Y)$ definiert als die Menge aller Abbildungen von X nach Y. Sei A eine nicht-leere Menge.

(a) Sei B eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Um zu zeigen, dass B abzählbar ist, konstruieren Sie eine Bijektion $f : B \longrightarrow \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(\{0,1\}, A)$ gleichmächtig zu $A \times A$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(A, \{0,1\})$ gleichmächtig zu $\mathcal{P}(A)$ ist.

(d) Nehmen Sie an, dass A abzählbar unendlich ist. Welche Mächtigkeit haben dann $\mathrm{Abb}(\{0,1\}, A)$ und $\mathrm{Abb}(A, \{0,1\})$? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.