Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

6. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

6.1. Schriftlich: (g) – 1 Punkt. Gegeben ist eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ sowie die Teilmengen $M_1, M_2 \subseteq M$ und $N_1, N_2 \subseteq N$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Aus der Inklusion $N_1 \subseteq N_2$ folgt, dass $f^{-1}(N_1) \subseteq f^{-1}(N_2)$.

(b) Es ist $M = f^{-1}(f(M))$.

(c) Wenn f surjektiv ist, dann gilt $N = f(f^{-1}(N))$.

(d) Es ist $N = f(f^{-1}(N))$.

(e) Es ist $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$.

(f) Es ist $f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$.

(g) Die Abbildung f ist injektiv genau dann, wenn $f(\{m_1\} \cap \{m_2\}) = f(\{m_1\}) \cap f(\{m_2\})$ für jede $m_1, m_2 \in M$.

(h) Es ist $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$.

6.2. Schriftlich: komplett – 5 Punkte. In der Vorlesung wurde der Ring $\mathbb{Z}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

(a) Berechnen Sie die Verknüpfungen $\overline{a} + \overline{b}$ und $\overline{a} \cdot \overline{b}$ für alle $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_5$. Stellen Sie Ihr Ergebnis jeweils tabellarisch durch eine Additions- bzw. Multiplikationstabelle dar. Die Zeilen und Spalten einer solchen Verknüpfungstabelle (zu einer Verknüpfung $*$) sind hierbei jeweils durch die Einträge von $\mathbb{Z}_5$ beschriftet. Der Eintrag in der Zeile mit Beschriftung $\overline{a}$ und der Spalte mit Beschriftung $\overline{b}$ ist gerade $\overline{a} * \overline{b}$.
Geben Sie zu jedem Element von $\mathbb{Z}_5 \setminus \{\overline{0}\}$ das multiplikativ inverse Element an.

(b) Sei a eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ invertierbar ist, genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$ ist. Bestimmen Sie alle Elemente in $\mathbb{Z}_{12}$, die ein multiplikativ inverses Element haben, und geben Sie das jeweilige Inverse an.

6.3. In der Vorlesung wurden die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als Menge gewisser Äquivalenzklassen definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung angegebene Regel zur Addition zweier rationaler Zahlen wohldefiniert ist, d.h. dass für Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ und $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ gilt, dass $\frac{ad + bc}{bd} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Addition rationaler Zahlen assoziativ ist und dass das Distributivgesetz für $+$ und $\cdot$ in den rationalen Zahlen gilt. Begründen Sie jeden Ihrer Schritte.

(c) Sei $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definiert durch $\iota(n) = \frac{n}{1}$. Zeigen Sie, dass ι injektiv ist. Wir identifizieren $\mathbb{Z}$ mit der Menge $\iota(\mathbb{Z})$. Begründen Sie jeweils mit Hilfe einer Gleichung, dass in $\mathbb{Z}$ und in $\iota(\mathbb{Z})$ auf dieselbe Art und Weise addiert und multipliziert wird. Überprüfen Sie, dass die von Ihnen genannten Gleichungen gelten.

6.4. Schriftlich: komplett – 4 Punkte. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und sei e das neutrale Element von G. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jedes $g, h, k \in G$ gilt: Wenn $g \cdot h = g \cdot k$ ist, dann ist $h = k$.

(b) Für $g, h \in G$ folgt aus der Gleichung $g \cdot g = h \cdot h$, dass $g = h$ ist.

(c) Wenn $g \cdot g = e$ für alle $g \in G$ ist, dann ist G eine abelsche Gruppe.

6.5. Für Mengen A und B definieren wir die *symmetrische Differenz* $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Sei C eine weitere Menge. Man kann leicht überprüfen (und dies müssen Sie nicht tun), dass die folgenden Gleichungen gelten:

(i) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

(ii) $\emptyset \triangle A = A = A \triangle \emptyset$

(iii) $A \triangle B = B \triangle A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(iv) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

Sei nun X eine nicht-leere Menge. Für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ betrachten wir die Verknüpfungen $A \triangle B$ und $A \cap B$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ ein Körper ist genau dann, wenn $|X| = 1$.

6.6. Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper und sei $1 \in \mathbb{K}$ das neutrale Element der Multiplikation. Mit $n \cdot 1$, für $n \in \mathbb{N}$, bezeichnen wir die n-fache Summe:

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}}.$$

Die *Charakteristik* von $\mathbb{K}$ ist die kleinste natürliche Zahl n, für die $n \cdot 1 = 0$ ist. Wenn $n \cdot 1 \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, sagt man, dass $\mathbb{K}$ Charakteristik 0 hat.

(a) Zeigen Sie, dass $(r \cdot 1)(s \cdot 1) = (rs) \cdot 1$ für alle $r, s \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $\bar{1} \in \mathbb{Z}_3$ das Einselement. Bestimmen Sie $n \cdot \bar{1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Charakteristik von $\mathbb{Z}_3$.

(c) Bestimmen Sie die Charakteristik von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

(d) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik $n \neq 0$. Zeigen Sie, dass n eine Primzahl ist.