Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

8. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

8.1. Schriftlich: (c), (d) – 4 Punkte. Bestimmen Sie die Einträge der Matrix A^n für die folgenden Matrizen A und jedes $n \in \mathbb{N}$.

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

(b)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\mathtt{i} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

(c)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}).$$

(d)
$$A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3).$$

8.2. Sei R ein kommutativer Ring und seien $m, n, l \in \mathbb{N}$. Zu einer Matrix $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(R)$ definieren wir die *transponierte Matrix* $A^T := (b_{ij}) \in M_{m\times n}(R)$ als die Matrix mit Einträgen $b_{ij} := a_{ji}$ für alle zulässigen Indizes i, j. Die transponierte Matrix A^T ergibt sich also dadurch, dass die Rollen von Zeilen und Spalten der Ausgangsmatrix A vertauscht werden. Seien $A, D \in M_{m\times n}(R)$ und $B \in M_{n\times l}(R)$. Sei $C \in M_{n\times n}(R)$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass die Gleichungen $(A+D)^T = A^T + D^T$, $(A^T)^T = A$, $(AB)^T = B^T A^T$ und $(C^T)^{-1} = (C^{-1})^T$ gelten.

8.3. Sei R ein kommutativer Ring und sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(R)$ ist *symmetrisch*, falls $A^T = A$ ist, und sie ist *schief-symmetrisch*, falls $A^T = -A$ gilt. Seien $A, B, C, D \in M_{n\times n}(R)$, mit A symmetrisch und B schief-symmetrisch. Bestimmen Sie, welche der folgenden Matrizen symmetrisch bzw. schief-symmetrisch sind, und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $AB + BA$
(b) $AB - BA$
(c) A^2
(d) B^2
(e) $C^T(D^T + D)C$
(f) $C^T(D - D^T)C$

8.4. Sei R ein kommutativer Ring und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Die *Spur* einer Matrix $A = (a_{ij})$ in $M_{n\times n}(R)$ ist definiert als die Summe der Diagonaleinträge von A, d.h. $\operatorname{Spur}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Seien $A, B \in M_{n\times n}(R)$, $C \in M_{m\times n}(R)$, $D \in M_{n\times m}(R)$ und sei $\lambda \in R$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\operatorname{Spur}(A^T) = \operatorname{Spur}(A)$
(b) $\operatorname{Spur}(A + B) = \operatorname{Spur}(A) + \operatorname{Spur}(B)$
(c) $\operatorname{Spur}(\lambda A) = \lambda \operatorname{Spur}(A)$
(d) $\operatorname{Spur}(DC) = \operatorname{Spur}(CD)$
(e) $\operatorname{Spur}(B^{-1}AB) = \operatorname{Spur}(A)$, wenn B invertierbar ist.

8.5. Schriftlich: komplett – 3 Punkte. Sei ω eine komplexe dritte Einheitswurzel, also Lösung der Gleichung $\omega^3 = 1$ mit $\omega \neq 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $1 + \omega + \omega^2 = 0$ ist.

(b) Sei $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie A^2 und A^{-1}.

8.6. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die Matrix $A(a) \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ durch

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{1}{2}a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $A(a+b) = A(a)A(b)$. Folgern Sie, dass jede Matrix $A(a)$ invertierbar ist.

8.7. Schriftlich: komplett – 3 Punkte. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mit Koeffizienten im Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mithilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 17 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 7. \end{aligned}$$

Dokumentieren Sie Ihre Schritte.

8.8. Gegeben seien die Matrizen mit reellen Einträgen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sind A bzw. B invertierbar? Falls ja, bestimmen Sie die Inverse.