Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

9. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

9.1. Sei R ein kommutativer Ring.

(a) Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(R)$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, falls $a_{ij} = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i > j$. Zeigen Sie, dass das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen wieder eine obere Dreiecksmatrix ist und dass die Diagonaleinträge des Produkts in diesem Fall gleich dem Produkt der Diagonaleinträge der multiplizierten Matrizen sind.

(b) Sei nun $A \in M_{n\times n}(R)$ und $1 < m < n$. Ziehen wir in A nach den ersten m Zeilen und den ersten m Spalten jeweils einen Trennstrich, so können wir uns A als aufgebaut aus vier kleineren Matrizen vorstellen:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array}\right).$$

mit $B \in M_{m\times m}(R)$, $C \in M_{m\times(n-m)}(R)$, $D \in M_{(n-m)\times m}(R)$, $E \in M_{(n-m)\times(n-m)}(R)$. Sei $A' \in M_{n\times n}(R)$ nach demselben Schema in Matrizen B', C', D', E' aufgeteilt. Zeigen Sie, dass man A und A' „kästchenweise“multiplizieren kann, d.h.

$$A \cdot A' = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B' & C' \\ \hline D' & E' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} BB' + CD' & BC' + CE' \\ \hline DB' + ED' & DC' + EE' \end{array}\right).$$

9.2. Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 - cx_2 &= 1 \\ (c-1)x_1 - 6x_2 &= -3 \end{aligned}$$

(i) eindeutig lösbar, (ii) lösbar aber nicht eindeutig lösbar, (iii) nicht lösbar?
Bestimmen Sie in jedem dieser Fälle die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

9.3. Schriftlich: (b) – 4 Punkte. Gegeben seien die Matrizen mit komplexen Einträgen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} \mathtt{i} & -\mathtt{i} & 0 & 2\mathtt{i} \\ -1 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist A invertierbar? Falls ja, schreiben Sie die Matrix A^{-1} als ein Produkt von Elementarmatrizen.

(b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix B und finden Sie Matrizen $P, Q \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$, sodass $PBQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $r = \text{Rang}(B)$.

9.4. Schriftlich: (c) – 4 Punkte. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen V Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Sei $V = \mathbb{C}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, mit Addition in $\mathbb{C}$ als Vektoraddition und Skalarmultiplikation gegeben durch Einschränkung der Multiplikation in $\mathbb{C}$.

(b) Sei $V = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mit Vektoraddition definiert durch $x \boxplus y := \max\{x, y\}$ und $\alpha \boxdot x := \alpha x$ für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V$.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$, $V = \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mit Vektoraddition definiert durch $x \boxplus y := x + y - v$ und Skalarmultiplikation gegeben durch $\alpha \boxdot x := \alpha(x - v) + v$ für $\alpha \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$ und v ein festes Element von V.

9.5. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_V$ für alle $x \in V$. Dokumentieren Sie, welche Axiome Sie benutzen.

9.6. Schriftlich: (a) – 2 Punkte. Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen Unterräume des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}^3$ sind. Begründen Sie Ihre Antworten. Wir schreiben aus Platzgründen $(a, b, c)^T$ für den Spaltenvektor mit den Einträgen a, b, c.

(a) $U_1 = \{(a, b, c)^T \in \mathbb{C}^3 : \dfrac{a + b}{\mathtt{i}} = 2c\}$,

(b) $U_2 = \{(a, b, c)^T \in \mathbb{C}^3 : a + 2b - c = \mathtt{i}\}$,

(c) $U_3 = \{(a, b, c)^T \in \mathbb{C}^3 : a^2 - \mathtt{i}c^2 = 0\}$.