Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

10. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich" gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

10.1. Gegeben ist das folgende Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ax_1 + (a+b)x_2 + bx_3 &= 3a+5b \\ bx_1 + abx_2 + ax_3 &= a(2b+3)+b \\ ax_1 + bx_2 + bx_3 &= a+5b. \end{aligned}$$

Geben Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems als Ausdruck in a und b an.

10.2. Schriftlich: (g) – 2 Punkte. Seien W_1, W_2 und U Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V und seien X und Y nicht-leere Teilmengen von V. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gilt $(-\alpha) \cdot v = -(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot (-v)$ für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $v \in V$.

(b) Die Menge X ist ein Unterraum von V genau dann, wenn für alle $v_1, v_2 \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ der Vektor $v_1 + \alpha v_2$ ein Element von X ist.

(c) Die Menge $W_1 + W_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in W_1 \wedge v_2 \in W_2\}$ ist ein Unterraum von V.

(d) Es gilt $(U \cap W_1) + (U \cap W_2) \subseteq U \cap (W_1 + W_2)$.

(e) Es gilt $U \cap (W_1 + W_2) \subseteq (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$.

(f) Wenn $X \subseteq Y \subseteq \mathrm{Span}(X)$ gilt, ist $\mathrm{Span}(X) = \mathrm{Span}(Y)$.

(g) Es gilt $\mathrm{Span}(X) \cup \mathrm{Span}(Y) \subseteq \mathrm{Span}(X \cup Y) = \mathrm{Span}(X) + \mathrm{Span}(Y)$.

10.3. Schriftlich: (c), (d) – 2 Punkte. Sei $0_{M_{4\times 3}(\mathbb{R})}$ die Nullmatrix von $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$. Seien A und $B \neq 0_{M_{4\times 3}(\mathbb{R})}$ feste Matrizen in $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen Unterräume von $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Die Teilmenge V_1 der invertierbaren Matrizen.

(b) Die Teilmenge $V_2 := \{X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{M_{4\times 3}(\mathbb{R})}\}$.

(c) Die Teilmenge $V_3 := \{X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid AX = B\}$.

(d) Die Teilmenge $V_4 := \{X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Spur}(X) = 0\}$.

(e) Die Teilmenge V_5 der Matrizen mit der Eigenschaft, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile, jeder Spalte und den beiden Diagonalen gleich ist.

10.4. Schriftlich: (a), (b), (i) – 4 Punkte. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Unterräume $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{(1,0,2)^T, (1,-1,1)^T\})$ und $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{(0,-1,-1)^T, (1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^T\})$ des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ stimmen überein.

(b) Es gilt $(2,5,-3)^T \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{(1,4,-2)^T, (-2,1,3)^T\}) \subseteq \mathbb{R}^3$.

(c) Wenn v_1 und v_2 Vektoren eines $\mathbb{Q}$-Vektorraumes V sind, gilt $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\{v_1, v_2\}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\})$.

(d) Wenn v_1 und v_2 Vektoren eines $\mathbb{Z}_2$-Vektorraumes V sind, gilt $\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_2}(\{v_1, v_2\}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}_2}(\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\})$

(e) $(1,0,1)^T, (1,1,0)^T, (0,1,1)^T$ sind linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

(f) $(\overline{1},\overline{0},\overline{1})^T, (\overline{1},\overline{1},\overline{0})^T, (\overline{0},\overline{1},\overline{1})^T$ sind linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $(\mathbb{Z}_2)^3$.

(g) $1+i$ und $2-i$ sind linear abhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.

(h) $1+i$ und $2-i$ sind linear abhängige Vektoren im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.

(i) Die Funktionen $f(x) = \pi(\sin(x))^2$, $g(x) = \sqrt{2}$ und $h(x) = (\cos(x+\pi))^2$ sind linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

10.5. Schriftlich: (c) – 2 Punkte. Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v_1,\ldots,v_n \in V$ $(n \geq 3)$ linear unabhängige Vektoren.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1+v_2, v_1-v_2, v_1-2v_2+v_3$ linear unabhängig sind. Sind auch die Vektoren $v_1+v_2-3v_3, v_1+3v_2-v_3, v_2+v_3$ linear unabhängig?

(b) Für $1 \leq k \leq n$ definieren wir $w_k := c_k v_k + v_1$ mit $c_k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $w_1,\ldots,w_n$ linear unabhängig sind genau dann, wenn $c_1 \neq -1$ ist.

(c) Seien $u_1,\ldots,u_m \in V$ linear unabhängig mit $\mathrm{Span}(\{v_1,\ldots,v_n\}) \cap \mathrm{Span}(\{u_1,\ldots,u_m\}) = \{0\}$. Zeigen Sie, dass $v_1,v_2,\ldots,v_n,u_1,\ldots,u_m$ linear unabhängige Vektoren sind.

Weihnachtsspecial

Die folgenden Aufgaben sind freiwillig. Eine schriftliche Ausarbeitung der markierten Aufgaben kann in der Übungsgruppe am 7./8. Januar 2020 abgegeben werden. Die Aufgaben werden nicht in den Gruppen besprochen. Die erreichten Punkte werden als Bonuspunkte betrachtet, von denen maximal fünf Punkte gewertet werden.

W.1. Für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ definieren wir die Relation R auf $\mathbb{Z}^2$ durch xRy, wenn $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$.

(a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $(0, 0)$, $(-1, 0)$ und $(1, 1)$, d.h. geben Sie jeweils alle Elemente von $[(0, 0)]$, $[(-1, 0)]$ und $[(1, 1)]$ an.

W.2. Schriftlich: komplett – 1 Punkt.

(a) Verwenden Sie den Euklidischen Algorithmus, um den größten gemeinsamen Teiler von 220 und 2457 zu berechnen.

(b) Bestimmen Sie $x, y \in \mathbb{Z}$, für die die Gleichung $\operatorname{ggT}(220, 2457) = 220x + 2457y$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Zahl $t \in \{z \in \mathbb{N}_0 \mid z < 220\}$, für die $2457t \equiv 7 \mod 220$ gilt.

W.3. Schriftlich: komplett – 1 Punkt. Sei z eine komplexe Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ ist.

(b) Sei $z = r(\cos\alpha + \mathtt{i}\sin\alpha)$ für $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\alpha \in [0, 2\pi[$. Zeigen Sie, dass dann $z^n = r^n(\cos n\alpha + \mathtt{i}\sin n\alpha)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Bestimmen Sie den Realteil und den Imaginärteil der komplexen Zahl $(1 + i)^{17}$.

W.4. Schriftlich: komplett – 1 Punkt. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mit Koeffizienten im Körper $\mathbb{Z}_3$ mithilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} x_1 + \overline{2}x_2 + x_3 &= \overline{0} \\ \overline{2}x_1 + x_2 + x_3 &= \overline{2} \\ x_1 + \overline{2}x_2 &= \overline{2}. \end{aligned}$$

Wie viele Lösungen gibt es?

W.5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sei $A_n(\alpha) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$(A_n(\alpha))_{ij} = \begin{cases} \alpha + j - 1, & \text{wenn } i \geq j, \\ i, & \text{wenn } i < j. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $A_n(\alpha)$ invertierbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

W.6. Schriftlich: komplett – 1 Punkt. Sei A die Matrix mit komplexen Einträgen

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \mathtt{i} & 2\mathtt{i} & 2\mathtt{i} \\ 2 + \mathtt{i} & 1 + 5\mathtt{i} & -1 + 5\mathtt{i} \\ 1 - \mathtt{i} & 4 + 2\mathtt{i} & 2 + 4\mathtt{i} \end{pmatrix}.$$

Ist A invertierbar? Falls ja, schreiben Sie die Matrix A^{-1} als ein Produkt von Elementarmatrizen. Begründen Sie Ihre Antwort.

W.7. Wir definieren $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Unterraum des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit der Einschränkung der Addition und Multiplikation von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Körper ist.

(c) Wir definieren $\lambda \star (a + b\sqrt{2}) := \lambda \cdot a$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$ und $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ bezüglich der gewöhnlichen Addition und $\star$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

W.8. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Seien u, v und w Vektoren in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V und seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ mit $\alpha, \gamma \neq 0$ und $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Dann folgt, dass $\mathrm{Span}(\{u, v\}) = \mathrm{Span}(\{v, w\})$.

(b) Wenn die drei Vektoren $(a_1, a_2, a_3, a_4)^T, (b_1, b_2, b_3, b_4)^T, (c_1, c_2, c_3, c_4)^T \in \mathbb{K}^4$ linear abhängig sind, sind auch die Vektoren $(a_2, a_1, a_4)^T, (b_2, b_1, b_4)^T, (c_2, c_1, c_4)^T \in \mathbb{K}^3$ linear abhängig.

(c) Wenn die drei Vektoren $(a_1, a_2, a_3, a_4)^T, (b_1, b_2, b_3, b_4)^T, (c_1, c_2, c_3, c_4)^T \in \mathbb{K}^4$ linear unabhängig sind, sind auch die Vektoren $(a_2, a_1, a_4)^T, (b_2, b_1, b_4)^T, (c_2, c_1, c_4)^T \in \mathbb{K}^3$ linear unabhängig.

W.9. Schriftlich: komplett – 1 Punkt. Bestimmen Sie eine Basis für die folgenden komplexen Vektorräume.

(a) $\{(a, b, c)^T \in \mathbb{C}^3 \mid a = c\} \subseteq \mathbb{C}^3$

(b) $\mathrm{Span}(\{x^2, x^2 + 1, x^2 + x, x^2 + x + 1\}) \subseteq \mathbb{C}[x]$

(c) $\{f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f(x) = 0$ für alle bis auf endlich viele $x \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$