Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

11. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

11.1. (a) Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(1+x,x)^T, (2+x,x)^T \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Für welche Werte $t \in \mathbb{Z}_5$ sind die Vektoren $(\overline{1},\overline{0},\overline{0})^T, (\overline{1},\overline{1},\overline{4})^T, (\overline{3},\overline{1},t^2)^T$ linear unabhängig in $\mathbb{Z}_5^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

11.2. Schriftlich: komplett – 4 Punkte. Gegeben ist die Menge

$$\mathcal{B} := \{(1,0,1,0)^T, (0,1,1,0)^T, (0,1,0,1)^T, (0,0,0,1)^T\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist.

(b) Ergänzen Sie die linear unabhängigen Vektoren $(1,1,1,1)^T$ und $(1,0,0,1)^T$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$, indem Sie Vektoren der Menge $\mathcal{B}$ hinzufügen.

(c) Sei $S := \{(0,1,-6,4)^T, (1,0,2,-1)^T, (4,1,2,0)^T, (3,1,0,1)^T\}$. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Span}(S)$, die nur Vektoren von S enthält. Geben Sie die Dimension von $\mathrm{Span}(S)$ an.

11.3. Schriftlich: (c),(d),(e) – 4 Punkte. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum der Dimension n, mit Unterräumen U, W, X. Zeigen Sie die folgenden Aussagen, falls möglich, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Jede Basis $\mathcal{B}$ von V enthält eine Teilmenge S, die Basis von U ist.

(b) Gilt $\dim(U) \leq \dim(W)$, so ist $U \subseteq W$.

(c) $\dim(U+W+X) = \dim(U) + \dim(W) + \dim(X) - \dim(U \cap W \cap X)$.

(d) Sei $n \geq 2$ und $U \neq W$ und $\dim(U) = n-1 = \dim(W)$. Dann ist $\dim(U \cap W) = n-2$.

(e) Sei $n \geq 3$ und seien U, W, X paarweise verschiedene Unterräume von V, jeweils der Dimension $n-1$. Dann ist $\dim(U \cap W \cap X) = n-3$.

11.4. Gegeben sind Teilmengen W und W' von $\mathbb{Q}^5$ mit

$$\begin{aligned} W &:= \{(a,-a,b,c,d)^T \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}, \\ W' &:= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T \mid \sum_{i=1}^{5} x_i = 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{5} (-1)^i x_i = 0\}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass W und W' Unterräume des $\mathbb{Q}^5$ sind.

(b) Bestimmen Sie die Menge $W \cap W'$ und finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $W \cap W'$.

(c) Bestimmen Sie auch Basen $\mathcal{C}$ von W und $\mathcal{C}'$ von W', die jeweils $\mathcal{B}$ enthalten.

(d) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}'$ von $W + W'$ und bestimmen Sie die Menge $W + W'$.

Bestimmen Sie auch die Dimension aller betrachteten Vektorräume.

11.5. Schriftlich: komplett – 2 Punkte. Bestimmen Sie eine Basis von $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, die nur invertierbare Matrizen enthält. Begründen Sie Ihre Antwort.

11.6. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, dass die Potenzen $\{1, x, x^2, \ldots\}$ von x eine Basis von $V = \mathbb{C}[x]$ bilden. Siehe Skript, Beispiel 5.14 (5). Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und V_n die Menge aller Polynome in $\mathbb{C}[x]$ vom Grad kleiner oder gleich n.

(a) Zeigen Sie, dass V_n ein Unterraum des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}[x]$ ist. Geben Sie eine $\mathbb{C}$-Basis von V_n an und bestimmen Sie die Dimension des $\mathbb{C}$-Vektorraumes V_n.

(b) Sei $W = \operatorname{Span}(\{-5 + x + 3x^2, 13 + x, 1 + x + 2x^2\}) \leq V_2$. Geben Sie eine $\mathbb{C}$-Basis von W an und bestimmen Sie die Dimension des $\mathbb{C}$-Vektorraumes W.

(c) Ist V_n auch ein Unterraum von $\mathbb{C}[x]$, wenn $\mathbb{C}[x]$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ betrachtet wird? Falls ja, geben Sie eine $\mathbb{R}$-Basis von V_n an und bestimmen Sie die Dimension des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V_n.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

11.7. Man nennt eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ein *magisches Quadrat*, falls alle Zeilensummen, alle Spaltensummen und die beiden Diagonalsummen $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ und $a_{13} + a_{22} + a_{31}$ miteinander übereinstimmen. Diese Summe wird als *magische Zahl* bezeichnet. Die Teilmenge $U \subseteq M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ aller magischen Quadrate ist ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ – siehe Aufgabe (10.3)(e).

(a) Sei $A = (a_{ij}) \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ein magisches Quadrat. Zeigen Sie, dass die magische Zahl von A gleich $3a_{22}$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraumes U sowie seine Dimension.