Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

12. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

12.1. Schriftlich: komplett – 4 Punkte. Sei K ein Körper und V, W, U K-Vektorräume. Seien $S \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $T \in \mathrm{Hom}_K(W, U)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $T \circ S$ K-linear ist.

(b) Sei V' ein Unterraum von V. Zeigen Sie, dass $S(V')$ ein Unterraum von W ist. Folgern Sie daraus, dass $\mathrm{im}(S)$ ein Unterraum von W ist.

(c) Sei W' ein Unterraum von W. Zeigen Sie, dass $S^{-1}(W')$ ein Unterraum von V ist. Folgern Sie daraus, dass $\mathrm{Ker}(S)$ ein Unterraum von V ist.

12.2. Schriftlich: (d), (e) – 2 Punkte. Sei n eine natürliche Zahl, K ein Körper und $Z \in M_n(K)$ fest gewählt. Sei $\mathbb{R}_n[x]$ der Unterraum der Polynome in $\mathbb{R}[x]$ vom Grad höchstens n. Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $T_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z)^T \mapsto (0, x, y)^T$,

(b) $T_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z)^T \mapsto (|x| + y, z)^T$,

(c) $T_3 \colon M_n(K) \to M_n(K), A \mapsto AZ + ZA$,

(d) $T_4 \colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}, \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \mapsto a_n$,

(e) $T_5 \colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}, \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \mapsto \begin{cases} a_k & \text{mit } k = \max\{j : a_j \neq 0\}, \text{ falls } \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \neq 0, \\ 0, & \text{falls } \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = 0. \end{cases}$

12.3. Sei $\mathbb{Q}_4[x]$ der Unterraum der Polynome in $\mathbb{Q}[x]$ vom Grad höchstens 4.

(a) Beschreiben Sie jeweils Bild und Kern der folgenden $\mathbb{Q}$-linearen Abbildungen, und geben Sie jeweils eine Basis dafür an. Demonstrieren Sie an diesem Beispiel jeweils die Gültigkeit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen.

i. $T : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$, definiert durch $T((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_4)^T$;

ii. $T : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$, definiert durch $T(v) = Bv$;

iii. $T : \mathbb{Q}_4[x] \to \mathbb{Q}_4[x]$, gegeben durch Differentiation nach x.

Hierbei ist die Matrix B gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie für die angegebenen linearen Abbildungen jeweils auch die zugehörige darstellende Matrix bezüglich der angeordneten Standardbasen der involvierten Vektorräume, also $(e_i \mid 1 \leq i \leq n)$ für $\mathbb{Q}^n$, beziehungsweise $(1, x, x^2, x^3, x^4)$ für $\mathbb{Q}_4[x]$.

12.4. Sei n eine natürliche Zahl. Welche der folgenden Vektorräume V sind die innere direkte Summe ihrer Unterräume U und W?

(a) $V = \mathbb{R}^4$,
$U = \mathrm{Span}\{(1, -2, -1, 0)^T, (-1, 4, 6, -4)^T\}, W = \mathrm{Span}\{(0, 1, 2, -2)^T, (4, -7, -4, -1)^T\}$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$,
$U = \mathrm{Span}\{(1,-2,-1)^T, (2,-3,-1)^T\}$, $W = \mathrm{Span}\{(2,2,-4)^T, (2,7,-7)^T\}$;

(c) $V = \mathbb{R}[x]$,
$U = \{\sum_{j=0}^n a_j x^j | a_j = 0 \text{ für } j \text{ gerade}\}$, $W = \{\sum_{j=0}^n a_j x^j | a_j = 0 \text{ für } j \text{ ungerade}\}$.

12.5. Schriftlich: komplett – 4 Punkte. Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für eine lineare Abbildung $T\colon V \to V$ äquivalent sind:

(i) $\mathrm{im}(T) = \mathrm{Ker}(T)$,

(ii) $T^2 = 0$, n ist gerade und $r(T) = \frac{n}{2}$.

12.6. Seien K ein Körper, V, W Vektorräume über K und U_1, U_2 Unterräume von V.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : U_1 \times U_2 \to U_1 + U_2$ mit $\varphi((u_1, u_2)) = u_1 + u_2$ ein Vektorraumisomorphismus ist, falls $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$ ist. Was lässt sich über die Abbildung φ sagen, falls $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ ist?

(b) Sei $V = U_1 \oplus U_2$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\mathrm{Hom}_K(V, W)$, $\mathrm{Hom}_K(U_1, W)$ und $\mathrm{Hom}_K(U_2, W)$ Vektorräume über K sind. Zeigen Sie, dass es einen Vektorraumisomorphismus von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ nach $\mathrm{Hom}_K(U_1, W) \times \mathrm{Hom}_K(U_2, W)$ gibt.