Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

13. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich" gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

13.1. Bestimmen Sie den Rank der Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

13.2. Schriftlich: komplett – 7 Punkte. Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f : v \mapsto Av$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang $r(f)$ von f sowie eine Basis von $\operatorname{im}(f)$.

(b) Bestimmen Sie den Defekt $n(f)$ von f sowie eine Basis von $\operatorname{Ker}(f)$.

(c) Sei $\mathcal{C}$ die angeordnete Basis des $\mathbb{R}^3$ mit Vektoren $c_1 := (0,0,2)^T$, $c_2 := (0,1,-1)^T$ und $c_3 := (1,-1,1)^T$. Sei $\mathcal{C}'$ die angeordnete Basis des $\mathbb{R}^3$ mit Vektoren $c_1' := (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$, $c_2' := (0,1,1)^T$ und $c_3' := (0,-1,1)^T$. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix von $\mathcal{C}$ zu $\mathcal{C}'$.

(d) Sei $\mathcal{B}$ die angeordenete Basis des $\mathbb{R}^4$ mit Vektoren $b_1 := (1,1,0,0)^T$, $b_2 := (0,0,1,0)^T$, $b_3 := (0,0,0,2)^T$ und $b_4 := (1,0,0,0)^T$. Bestimmen Sie die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ sowie die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}'}(f)$.

13.3. Seien $\mathcal{E}_2 = ((1,0)^T, (0,1)^T)$ und $\mathcal{E}_3 = ((1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T)$ die angeordeneten Standardbasen von $\mathbb{R}^2$ beziehungsweise $\mathbb{R}^3$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f((x,y)^T) = (x+2y, x-y, 2x+y)^T \text{ beziehungsweise } g((x,y,z)^T) = (x-2y+3z, 2y-3z)^T.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrizen $M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_3}(f)$, $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2}(g)$, $M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_2}(g \circ f)$ und $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(f \circ g)$ der linearen Abbildungen f, g, $g \circ f$ und $f \circ g$ bezüglich der Basen $\mathcal{E}_2$ beziehungsweise $\mathcal{E}_3$.

(b) Zeigen Sie, dass $g \circ f$ bijektiv ist, und bestimmen Sie $M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_2}((g \circ f)^{-1})$.

13.4. Schriftlich: komplett – 3 Punkte. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sei A eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{R}$ und sei $b \in \mathbb{R}^m$. Außerdem sei T die lineare Abbildung $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Gilt $r(T) = m$, dann hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ immer eine Lösung.

(b) Gilt $r(T) = n$, so hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ höchstens eine Lösung.

(c) Gilt $m = n = r(T)$, so hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau eine Lösung.

13.5. Seien K ein Körper, V ein Vektorraum über K und W ein Unterraum von V.

(a) Wir definieren eine Relation $\sim$ auf V durch

$$u \sim v \iff u - v \in W$$

für alle $u, v \in V$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse eines Elementes $v \in V$ mit $v+W$ und die Menge der Äquivalenzklassen mit V/W, den sogenannten *Quotientenraum* von V über W. Wir definieren Addition und Skalarmultiplikation auf V/W durch

$$\begin{aligned} (u + W) \boxplus (v + W) &:= (u + v) + W \text{ und} \\ \lambda \boxdot (v + W) &:= (\lambda \cdot v) + W \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in K$ und $u, v \in V$. Zeigen Sie, dass diese Operationen wohldefiniert sind.

(c) Zeigen Sie, dass V/W mit den Operationen aus Teil (b) ein K-Vektorraum ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\pi \colon V \to V/W, v \mapsto v + W$$

linear ist und bestimmen Sie $\operatorname{Ker}(\pi)$ und $\operatorname{im}(\pi)$. Nehmen Sie nun an, dass V endlich dimensional ist. Folgern Sie mithilfe der Dimensionsformel für lineare Abbildungen, dass $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$.