Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

14. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

14.1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Seien U, V und W endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und seien $e, f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$ und $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{im}(e+f) \subseteq \mathrm{im}(e) + \mathrm{im}(f)$ und folgern Sie daraus, dass $r(e+f) \leq r(e) + r(f)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(h \circ g)$ und $\mathrm{im}(h \circ g) \subseteq \mathrm{im}(h)$.

(c) Zeigen Sie, dass $n(g) \leq n(h \circ g) \leq n(h) + n(g)$.

(d) Zeigen Sie, dass $r(h) + r(g) - \mathrm{dim} V \leq r(h \circ g) \leq r(h)$.

14.2. Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrizen:

(a)
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

(b)
$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

(c)
$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathtt{i} & 1 & 0 \\ \mathtt{i} & 0 & 0 & 1 \\ 1+\mathtt{i} & 0 & 0 & -\mathtt{i} \\ 0 & 1 & \mathtt{i} & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

(d)
$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

(e)
$$A_5 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & 0 \\ ab & b^2 & bc & 0 \\ ac & bc & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

14.3. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, n eine natürliche Zahl und A eine Matrix in $M_n(\mathbb{K})$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Es gilt $\det(-A) = -\det(A)$.

(b) Wenn $S \in GL_n(\mathbb{K})$ ist, ist $\det(A) = \det(SAS^{-1})$.

(c) Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = -A^T$ und n ungerade ist, ist $\det(A) = 0$.

(d) Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und A invertierbar mit $A^{-1} = A^T$ ist, ist $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

14.4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei $A_n(\alpha) \in M_n(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$(A_n(\alpha))_{ij} = \begin{cases} \alpha + j - 1, & \text{wenn } i \geq j, \\ i, & \text{wenn } i < j. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\det(A_n(\alpha)) = \alpha^n$ ist.

14.5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Sei $V_n(\alpha) \in M_n(\mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch $(V_n(\alpha))_{ij} = \alpha_i^{j-1}$ Zeigen Sie, dass $\det(V_n(\alpha)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$ ist.